TD15 Ex 11

- Par linéarisation $\sin^4(x)\times\cos^3(x)=\frac{1}{64}\left(3\cos(x)-3\cos(3x)-\cos(5x)+\cos(7x)\right)$

Donc $\int_0^{\pi/4}\sin^4(x).\cos^3(x)dx=\frac{1}{64}\left[3\sin(x)-\sin(3x)-\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)\right]_0^{\pi/4}$

$$=\frac{1}{64}\left[\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{5\sqrt{2}}-\frac{1}{7\sqrt{2}}\right]=\boxed{\frac{9}{280\sqrt{2}}}$$

- méthode 1 : par double IPP

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}.\cos x-\int -e^{-x}(-\sin x)dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$$

IPP licite car $x\mapsto e^{-x}$ et $x\mapsto\sin x$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$

$$\int e^{-x}\sin x\,dx=-e^{-x}.\sin x-\int -e^{-x}\times\cos x\,dx=-e^{-x}.\sin x+\int e^{-x}.\cos x\,dx$$

IPP licite car $x\mapsto -e^{-x}$ et $x\mapsto -\cos x$ sont C^1 sur $\mathbb{R}$

Donc : $\int e^{-x}.\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\cos x\,dx$

donc $\int e^{-x}.\cos x\,dx=-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x-\sin x)=\boxed{\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\text{constante}}$

méthode 2 : avec l'exponentielle complexe

$$\int e^{-x}.\cos x\,dx=\mathrm{Re}\left(\int e^{(-1+i)x}dx\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(-1+i)x}}{-1+i}\right)$$

$$=\mathrm{Re}\left(\frac{-1-i}{2}e^{-x}(\cos x+i\sin x)\right)=-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x-\sin x)$$

$$=\boxed{\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\text{constante}}$$

- $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 2x(-e^{-x})\,dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{e} - 0 + 2.\int_0^1 x e^{-x}\,dx$ IPP licite car $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont C^1 sur $[0,1]$

or $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}\,dx$ IPP licite car $x \mapsto x$ et $x \mapsto -e^{-x}$ sont C^1 sur $[0,1]$

$\displaystyle = -\frac{1}{e} - 0 + \int_0^1 e^{-x}\,dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x}\right]_0^1$

$\displaystyle = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$

donc $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx = \boxed{2 - \frac{5}{e}}$

- $\displaystyle\int_0^1 t.\arctan t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{1+t^2}\,dt$

$\displaystyle = \frac{\pi}{8} - 0 - \frac{1}{2}.\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$ IPP licite car $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et arctan C^1 sur $[0,1]$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = \left[t - \arctan t\right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

donc $\displaystyle\int_0^1 t.\arctan t\,dt = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}$