On se donne $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

On pose $g(x) = f(a+b-x)$.

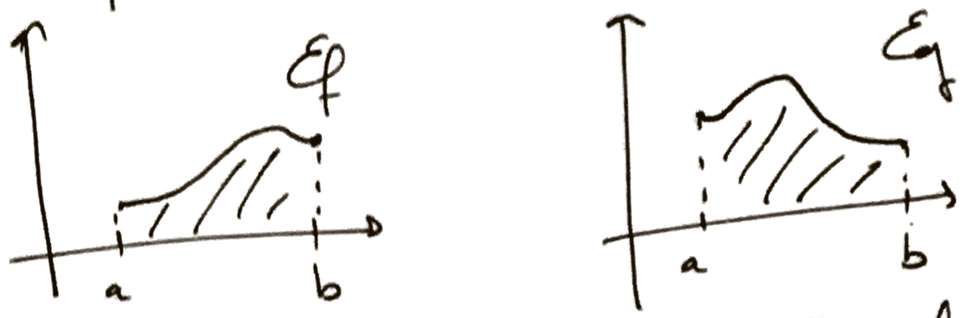
Alors : $g(x)$ existe $\iff a \leq a+b-x \leq b$

$\iff 0 \leq b-x \leq b-a$

$\iff a \leq x \leq b$

Donc g est définie sur $[a,b]$.

Par composition elle est continue sur $[a,b]$.



graphiquement : les deux aires sont égales.

1. On pose $I = \int_a^b f(x)\,dx$

et $x = a+b-t = \varphi(t)$

x	t
a	b
b	a

φ est affine donc C^1 sur $[a,b]$ donc le chgt de variable est licite.

$dx = -dt$

$$I = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b f(a+b-t)\,dt = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

2. $I = \int_0^{\pi} \frac{x \times \sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$

D'après 1. on a

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \times \sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} dx$$

Mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin x$
et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$

$$= \pi . \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx - I$$

Donc $I = \frac{\pi}{2} \times \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$

$$= \frac{\pi}{2} \Big[-\arctan(\cos x) \Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \left(-\arctan(-1) + \arctan 1 \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{4}}$$