1. • Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes on a d'après l'inégalité triangulaire.

$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$$

Donc pour $a\in]-1,1[$ et $x\in]0,\pi[$:

$$||1|-|ae^{ix}|| \leqslant |1+ae^{ix}| \leqslant |1|+|ae^{ix}|$$

or $|1|=1$ et $|ae^{ix}|=|a|\times|e^{ix}|=|a|\times 1=|a|$

Donc $$|1-|a|| \leqslant |1+ae^{ix}| \leqslant 1+|a|$$

Comme les 3 membres sont $\geqslant 0$ on peut élever au carré en conservant les inégalités :

$$(1-|a|)^2 \leqslant f_a(x) \leqslant (1+|a|)^2$$

• Pour $a\in]-1,1[$ et $x\in[0,\pi]$:

$f_a(\pi-x)=|1-ae^{i(\pi-x)}|^2$ or $e^{i(\pi-x)}=e^{i\pi}\times e^{-ix}$

$=-e^{-ix}$

donc $f_a(\pi-x)=|1+ae^{-ix}|^2$

Or si $z\in\mathbb{C}$ on a $|z|=|\bar{z}|$ et comme a est réel :

$$\overline{1+ae^{-ix}}=1+ae^{ix}$$

donc $$f_a(\pi-x)=|1+ae^{ix}|^2=f_{-a}(x)$$

• Pour $a \in]-1,1[$ et $x \in [0,\pi]$:

$f_{a^2}(x) = |1 - a^2 e^{ix}|^2$

mais $1 - a^2 e^{ix} = 1^2 - (a e^{i\frac{x}{2}})^2 = (1 - a e^{i\frac{x}{2}})(1 + a e^{i\frac{x}{2}})$

donc $f_{a^2}(x) = |1 - a^2 e^{ix}|^2 = |1 - a e^{i\frac{x}{2}}|^2 \times |1 + a e^{i\frac{x}{2}}|^2$

$= f_a\left(\frac{x}{2}\right) \times f_{-a}\left(\frac{x}{2}\right)$

2. Pour tout $a \in]-1,1[$:

$g(-a) = \int_0^\pi \ln(f_{-a}(x))\,dx = \int_0^\pi \ln(f_a(\pi - x))\,dx$

On pose $t = \pi - x$

Le chgt de variable est licite car affine.

$g(-a) = \int_\pi^0 \ln(f_a(t))(-dt) = \int_0^\pi \ln(f_a(t))\,dt = g(a)$

Donc g est paire.

3. Pour tout $a \in]-1,1[$:

$g(a^2) = \int_0^\pi \ln(f_{a^2}(x))\,dx = \int_0^\pi \ln\left(f_a\left(\frac{x}{2}\right) \times f_{-a}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$

$= \int_0^\pi \left(\ln\left(f_a\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \ln\left(f_{-a}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)dx$

$= \int_0^\pi \ln\left(f_a\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx + \int_0^\pi \ln\left(f_{-a}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$

Si on utilise le changement de variable affine $t = \frac{x}{2}$

on a $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(f_a\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \int_0^{\pi/2} \ln\left(f_a(t)\right)(2dt) = 2\times\int_0^{\pi/2} \ln(f_a(t))dt$

$$= 2\times\int_0^{\pi/2} \ln(f_a(x))dx$$

Avec $\frac{x}{2} = \pi - t$ on a :

$$\int_0^{\pi} \ln\left(f_{-a}\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx = \int_{\pi}^{\pi/2} \ln\left(f_{-a}(\pi - t)\right)(-2dt)$$

$$= 2.\int_{\pi/2}^{\pi} \ln\left(f_{-a}(\pi - t)\right)dt$$

$$= 2.\int_{\pi/2}^{\pi} \ln\left(f_a(t)\right)dt = 2\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(f_a(x))dx$$

Donc d'après la relation de Chasles :

$$g(a^2) = 2.\int_0^{\pi} \ln(f_a(x))dx = \boxed{2g(a)}$$

4. On a $\forall x \in [0,\pi]$, $f_0(x) = 1$

donc $g(0) = 0$

Et $\forall x \in [0,\pi]$, $2\ln(1-|a|) \leq \ln(f_a(x)) \leq 2\ln(1+|a|)$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi} 2.\ln(1-|a|)\,dx \leq g(a) \leq \int_0^{\pi} 2.\ln(1+|a|)\,dx$$

ie $2\pi.\ln(1-|a|) \leq g(a) \leq 2\pi\times\ln(1+|a|)$

Par encadrement :

$$g(a) \xrightarrow[a \to 0]{} 0$$

Comme $g(0) = 0$ on en déduit que g <u>est continue en 0</u>

<u>5.</u> Pour $a \in]-1,1[$ fixé :

$$g(a) = \frac{1}{2} g(a^2) = \frac{1}{4} g(a^4) = \frac{1}{8} g(a^8) = \dots$$

Par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(a) = \frac{1}{2^n} \times g\left(a^{2^n}\right)$$

Mais $a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $a^{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (suite extraite)

donc comme g continue en 0 : $g\left(a^{2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(0) = 0$

On a aussi $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc par produit de limites :

$$\frac{1}{2^n} \times g\left(a^{2^n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $g(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Mais $g(a)$ ne dépend pas de n

donc on a aussi $g(a) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(a)$.

Par unicité de la limite : $\boxed{g(a) = 0}$