1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2 \sin(\pi x)$

f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le th de la valeur moyenne :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx$$

On : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} f(1) - \frac{1}{n} f(0)$

Donc par somme de limites,

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx + 0 + 0 = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Reste à calculer $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 \sin(\pi x)\,dx$

$$\int_0^1 \underbrace{x^2}_{u(x)} \underbrace{\sin(\pi x)}_{v'(x)}\,dx \overset{IPP}{=} \left[x^2 \frac{-1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1 2x \frac{-1}{\pi}\cos(\pi x)\,dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\pi} - 0 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$$

L'IPP est licite car u et v sont C^1 sur $[0,1]$.

De même :

$$\int_0^1 x.\cos(\pi x)\,dx = \left[x\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\,dx$$

$$= 0 - 0 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \sin(\pi x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}\right)\right)$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 x^2\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}$

Donc $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}$

2. $x_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n! \times n^n}} > 0$ donc on peut poser $y_n = \ln(x_n)$

On a $y_n = \frac{1}{n} \times \ln\left(\frac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)$

Mais $\frac{(2n)!}{n! \times n^n} = \frac{(n+1)(n+2) \times \dots \times (2n)}{n \times n \times \dots \times n} = \left(1+\frac{1}{n}\right) \times \left(1+\frac{2}{n}\right) \times \dots \times \left(1+\frac{n}{n}\right)$

$= \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)$

Donc $y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n} \ln(2)$

Comme $x \longmapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$:

$\lim_{n \to +\infty} y_n = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx + 0$

Les fonctions $x \longmapsto \ln(1+x)$ et $x \longmapsto x$ sont C^1 sur $[0,1]$ donc

on a par intégration par parties :

$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[x \cdot \ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx$

$= \ln(2) - 0 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$

$= \ln(2) - \left[x - \ln|1+x|\right]_0^1 = -1 + 2\ln 2$

Comme $x_n = e^{y_n}$ on a par continuité de exp sur $\mathbb{R}$:

$\lim_{n \to +\infty} x_n = e^{2\ln(2) - 1} = \boxed{\frac{4}{e}}$