TD15 Ex16

1. Il suffit d'étudier la fonction $t \mapsto \ln t - (t-1)$

2. Pour $k \in [\![1,n]\!]$ on a donc $\ln a_k \leq a_k - 1$

donc $\ln(x_k) - \ln(\bar{x}) \leq \dfrac{x_k}{\bar{x}} - 1$

On additionne ces inégalités :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)\right) - n.\ln(\bar{x}) \leq \frac{1}{\bar{x}} \times \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}_{= n\bar{x}} - n = 0$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \leq n.\ln(\bar{x})$

En divisant par n : $\boxed{\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) \leq \ln\left(\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}$

3. On choisit $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

Comme f est continue sur $[0,1]$ et $\ln \circ f$ aussi :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \ln(f(t))\,dt$$

Par stabilité des inégalités larges et continuité de ln :

$$\boxed{\int_0^1 \ln(f(t))\,dt \leq \ln\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)}$$