On suppose $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $P(x) = \int_a^b (f(t) + x.g(t))^2 dt$

On définit ainsi $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \int_a^b \left( f(t)^2 + 2x f(t).g(t) + x^2.g(t)^2 \right) dt$$

$$= \int_a^b f(t)^2 dt + 2x.\int_a^b f(t)g(t)dt + x^2.\int_a^b g(t)^2 dt$$

de la forme $\alpha + \beta x + \gamma x^2$

où $\alpha, \beta, \gamma$ constantes réelles

donc $P$ est une fonction polynomiale de degré $\leq 2$.

<u>Cas 1</u> $\int_a^b g(t)^2 dt \neq 0$

Alors $P$ est une fonction polynomiale de degré exactement 2.

On fixe $x \in \mathbb{R}$.

On a $\forall t \in [a,b], \; (f(t) + x.g(t))^2 \geqslant 0$

donc par positivité de l'intégrale : $P(x) \geqslant 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$.

Comme $P$ est une fonction polynomiale de degré 2, son discriminant est $\leq 0$.

Ici $\Delta = 4\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 - 4\left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)$

Donc $\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\,dt\right)$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,dt}$$

<u>Cas 2</u> : $\int_a^b g(t)^2\,dt = 0$.

Comme $g^2$ est continue sur $[a,b]$ et $\forall t \in [a,b]$, $g(t)^2 \geq 0$

on a par stricte positivité de l'intégrale :

$$\forall t \in [a,b],\ g(t)^2 = 0$$

donc $\forall t \in [a,b]$, $g(t) = 0$

L'inégalité à démontrer est donc : $0 \leq 0$.

On a donc dans tous les cas :

$$\left|\int_a^b f(t)\times g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,dt}$$

<u>Rem:</u> On ne peut pas dire grand chose de plus sur :

$$\int_a^b f(t)\times g(t)\,dt.$$

En tout cas : $\displaystyle\int_a^b f(t)\times g(t)\,dt \neq \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\times\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$