On suppose $a \in \mathbb{R}_+^*$

et $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement croissante sur $[0,a]$

dérivable sur $]0,a[$

et tq $f(0) = 0$

D'après le th de la bijection monotone, f est bijective de $[0,a]$ vers $[0, f(a)]$ et sa bijection réciproque $g : [0, f(a)] \longrightarrow [0,a]$ est continue et strictement croissante sur $[0, f(a)]$.

<u>1.</u> Soit $t \in [0,a]$.

$$\int_0^t f(x)dx + \int_0^{f(t)} g(y)dy = \int_0^t x^p dx + \int_0^{t^p} y^{\frac{1}{p}} dy$$

$$= \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^t + \left[\frac{y^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1}\right]_0^{t^p}$$

$$= \frac{t^{p+1}}{p+1} - 0 + \frac{t^{1+p}}{\frac{1}{p}+1} - 0$$

$$= \frac{t^{p+1}}{p+1}(1+p) = t^{p+1} = t.f(t)$$

2. On pose $F(t) = \int_0^t f(x)dx$

et $G(t) = \int_0^t g(y)dy$

Comme f et g sont continues respectivement sur $[0,a]$ et sur $[0,f(a)]$ on sait d'après le théorème fondamental de l'analyse que F est de classe C^1 sur $[0,a]$ et que G est de classe C^1 sur $[0,f(a)]$.

Or $\forall t \in [0,a]$, $\varphi(t) = F(t) + G(f(t)) - t \times f(t)$

Donc φ est continue sur $[0,a]$ comme somme, composée et produit de fonctions continues.

De même elle est dérivable sur $]0,a[$

3. $\forall t \in]0,a[$, $\varphi'(t) = F'(t) + f'(t) \times G'(f(t)) - f(t) - t \times f'(t)$

$= f(t) + f'(t) \times \underbrace{g(f(t))}_{=t} - f(t) - t \times f'(t)$

$= 0$

Comme est continue sur $[0,a]$ on en déduit que φ est constante sur $[0,a]$.

Or $\varphi(0) = \int_0^0 f(x)\,dx + \int_0^{f(0)} g(y)\,dy - 0 \times f(0)$

$= 0$ car $f(0) = 0$

Donc $\forall t \in [0,a]$, $\varphi(t) = 0$.

Donc la formule (1) est démontrée.