On suppose $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq 2$)

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on suppose que $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$

1. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. On suppose $M_2 > 0$.

Comme f C^2 sur $\mathbb{R}$ la formule de Taylor Mac Laurin donne :

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \int_x^{x+h} \frac{f''(t)}{1!}(x+h-t)\,dt$$

donc $f(x+h) - f(x) - h.f'(x) = \int_x^{x+h} f''(t) \times (x+h-t)\,dt$

donc $|f(x+h) - f(x) - h \times f'(x)| \leq \int_x^{x+h} |f''(t)| \times |x+h-t|\,dt$

$$\leq M_2 \times \int_x^{x+h} (x+h-t)\,dt = \frac{M_2}{2} h^2$$

De même :

$$|f(x-h) - f(x) + h f'(x)| \leq \frac{M_2}{2} h^2$$

En remarquant que :

$$f(x+h) - f(x-h) - 2h f'(x) = \left(f(x+h) - f(x) - h.f'(x)\right) - \left(f(x-h) - f(x) + h f'(x)\right)$$

l'inégalité triangulaire nous donne :

$$|f(x+h) - f(x-h) - 2h f'(x)| \leq M_2 h^2$$

Elle donne aussi :

$$2h.|f'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \leq |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)|$$

donc :

$$2h.|f'(x)| \leq M_2 h^2 + |f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2.M_2 + 2M_0$$

Comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ on en déduit :

$$M_1 \leq \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h} \overset{\text{def}}{=} \varphi(h) \quad \text{ceci pour tout } h > 0$$

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall h > 0, \quad \varphi'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{M_0}{h^2}$$

Donc : $\varphi'(h) = 0 \iff h^2 = \dfrac{2M_0}{M_2}$

$$\iff h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
h & 0 & & \sqrt{2M_0/M_2} & & +\infty \\
\hline
\varphi & & \searrow & \sqrt{2M_0M_2} & \nearrow &
\end{array}$$

On choisit $h = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$

Alors $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$

Si $M_2 = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 0$

donc f est une fonction affine.

Mais f' est bornée donc f est une fonction constante.

On a donc $M_1 = M_2 = 0$ et donc l'inégalité à démontrer est $0 \leq 0$.

<u>2.</u> Pour $n \geq 2$ on note H_n le prédicat :

" si $f \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et si $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ alors si on pose $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ on a :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \times M_0^{1-\frac{k}{n}} \times M_n^{\frac{k}{n}} \text{ "}$$

<u>Pour $n=2$</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ C^2 tq f, f', f'' bornées.

On doit montrer que

$M_0 \leq M_0$ $(k=0)$

$M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$ $(k=1)$

$M_2 \leq M_2$ $(k=n)$

Une a été prouvée au 1. et les deux autres sont évidentes.

<u>Hérédité</u> Soit $n \geq 2$ fixé pour lequel $H_2, H_3, \dots, H_n$ sont vrais. Montrons que H_{n+1} est vrai.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^{n+1} telle que $f, f', \dots, f^{(n)}$ et $f^{(n+1)}$ sont bornées.

* Pour $k=0$ et $k=n+1$ on doit montrer que

$M_0 \leqslant M_0$ et $M_{n+1} \leqslant M_{n+1}$ ce qui est évident.

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. but mq $M_k \leqslant 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \times M_0^{1-\frac{k}{n+1}} \times M_n^{\frac{k}{n+1}}$

* Alors $k-1 \leqslant n-1$ donc $(n+1)-(k-1) \geqslant 2$

donc, f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$, on sait que

$f^{(k-1)}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

D'après H_2 pour $f^{(k-1)}$ on a : $M_k^2 \leqslant 2 M_{k-1} M_{k+1}$

* De plus f est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ donc d'après

Hk on a :

$\forall j \in [\![0, k]\!], \quad M_j \leqslant 2^{\frac{j(k-j)}{2}} \times M_0^{1-\frac{j}{k}} \times M_k^{\frac{j}{k}}$

et en particulier pour $j=k-1$:

$$M_{k-1} \leqslant 2^{\frac{k-1}{2}} \times M_0^{\frac{1}{k}} \times M_k^{\frac{k-1}{k}}$$

* La fonction $f^{(k)}$ est C^{n+1-k} sur $\mathbb{R}$ donc d'après le

prédicat H_{n+1-k} on a :

$$\forall j \in [\![0, n+1-k]\!], \quad M_{k+j} \leqslant 2^{\frac{j(n+1-k-j)}{2}} \times M_k^{1-\frac{j}{n+1-k}} \times M_{n+1}^{\frac{j}{n+1-k}}$$

et en particulier pour $j=1$:

$$M_{k+1} \leqslant 2^{\frac{n-k}{2}} \times M_k^{1-\frac{1}{n+1-k}} \times M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}$$

* Par produit d'inégalités positives :

$$M_k^2 \leqslant 2M_{k-1} \times M_k \leqslant 2 \times \underbrace{2^{\frac{k-1}{2}} \times M_0^{\frac{1}{k}} \times M_k^{\frac{k-1}{k}} \times 2^{\frac{n-k}{2}} \times M_k^{1-\frac{1}{n+1-k}} \times M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}}_{= 2^{\frac{n+1}{2}} \times M_0^{\frac{1}{k}} \times M_k^{\frac{k-1}{k} + \frac{n-k}{n+1-k}} \times M_{n+1}^{\frac{1}{n+1-k}}}$$

On élève à la puissance $\frac{k(n+1-k)}{n+1}$:

$$M_k^{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}} \leqslant 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \times M_0^{1-\frac{k}{n+1}} \times \underbrace{M_k^{\frac{(k-1)(n+1-k)}{n+1} + \frac{k(n-k)}{n+1}}}_{\overset{\text{def}}{=} C} \times M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}}$$

On divise par C on obtient après simplification :

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \times M_0^{1-\frac{k}{n+1}} \times M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}}$$

En effet : $2k(n+1-k) - (k-1)(n+1-k) - k(n-k) = n+1$.

⚠ Pour diviser par C il faut que $M_k > 0$.

Si on a $M_k = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = 0$

donc f est une fonction polynômiale de degré au plus $k-1$.

Comme f est bornée elle est donc constante.

On a alors $M_1 = M_2 = \dots = M_n = 0$

donc les inégalités à démontrer sont $0 \leq 0$.

* On a donc dans tous les cas :

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!], \; M_k \leq 2^{\frac{k(n+1-k)}{2}} \times M_0^{1-\frac{k}{n+1}} \times M_{n+1}^{\frac{k}{n+1}}$$

Donc H_{n+1} est vrai.

* Par récurrence : H_n est vrai pour tout $n \geq 2$.