1. $u_1 = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \left[t - \ln(1+t)\right]_0^1$

$= 1 - \ln 2 - (0 - \ln 1) = \boxed{1 - \ln 2}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

* $\forall t \in [0,1]$, $\frac{t^n}{(1+t)^n} \geqslant 0$

donc $u_n \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.

* $\forall t \in [0,1]$, $0 < 1+t \leq 2$ donc $\frac{1}{1+t} \geq \frac{1}{2}$

donc $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t} \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Comme $x \longmapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$\forall t \in [0,1]$, $\frac{t^n}{(1+t)^n} = \left(\frac{t}{1+t}\right)^n \leqslant \frac{1}{2^n}$

Par croissance de l'intégrale : $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{dt}{2^n} = \frac{1}{2^n}$

Par croissance de $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$u_n \leqslant \frac{1}{2}$$

* Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}}$

3. On fixe $a \in [0,1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n^n = \underbrace{\int_0^a \frac{t^n}{(1+t)^n}\,dt}_{\geq 0} + \int_a^1 \frac{t^n}{(1+t)^n}\,dt$$

donc $u_n^n \geq \displaystyle\int_a^1 \frac{t^n}{(1+t)^n}\,dt$

On a si $t \in [a,1]$: $1+t \geq 1+a > 0$

donc $\dfrac{1}{1+t} \leq \dfrac{1}{1+a}$

donc $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t} \geq 1 - \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{a}{1+a}$

donc $\dfrac{t^n}{(1+t)^n} \geq \dfrac{a^n}{(1+a)^n}$

Par croissance de l'intégrale : $u_n^n \geq \displaystyle\int_a^1 \frac{t^n}{(1+t)^n}\,dt \geq \int_a^1 \frac{a^n\,dt}{(1+a)^n} = \frac{a^n(1-a)}{(1+a)^n}$

Par croissance de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ sur $\mathbb{R}^+$: $\boxed{u_n \geq (1-a)^{\frac{1}{n}} \cdot \dfrac{a}{1+a}}$

4. On choisit $\forall n \geq 1$, $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

On a d'après 2. et 3. :

$$\forall n \geq 1, \quad \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \times \frac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

or $\dfrac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$

et $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{-\frac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

puisque $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées

Donc $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \times \dfrac{1-\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$

ce qui permet de conclure par encadrement que

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.