On note $f : t \longmapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$

$f$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

1. Soit $x>0$. but $G(x)$ existe.

Comme $x>0$, $\left[\frac{1}{x}, x\right] \subseteq ]0,+\infty[$

donc $f$ est continue sur $\left[\frac{1}{x}, x\right]$.

Elle est donc intégrable sur ce segment.

Donc $G(x)$ existe.

On $G$ est définie sur $]0,+\infty[$.

Rem: $G$ est définie au moins sur $]0,+\infty[$ :

$]0,+\infty[ \subseteq \mathcal{D}_G$.

On ne demande pas d'étudier l'inclusion réciproque

2. $f$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \in ]0,+\infty[$.

On pose $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

D'après le th fondamental de l'analyse la fonction $F$ est définie et de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$

et $\forall x>0,\quad F'(x)=f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$

D'autre part :

$$\forall x>0,\quad G(x)=\int_1^x f(t)\,dt+\int_{1/x}^1 f(t)\,dt$$
$$=\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^{1/x} f(t)\,dt=F(x)-F\left(\frac{1}{x}\right)$$

$F$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

$x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$.

Par composée : $x\longmapsto F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

Par somme : $\boxed{G \text{ est } C^1 \text{ sur } ]0,+\infty[.}$

3. De plus,

$$\forall x>0,\quad G'(x)=F'(x)-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot F'\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=f(x)+\frac{1}{x^2}\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}\times\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$
$$=\frac{\ln x}{1+x^2}-\frac{\ln x}{1+x^2}=0$$

Donc $G$ est constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

or $G(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$

Donc $\boxed{\forall x > 0,\ \int_{1/x}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0}$

4. Retrouver ce résultat avec le changement de variable $t = \frac{1}{s}$.

On fixe $x > 0$.

On pose donc $t = \frac{1}{s} = \varphi(s)$

| $t$ | $s$ |
|---|---|
| $1/x$ | $x$ |
| $x$ | $1/x$ |

$\varphi$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$ donc sur $[\frac{1}{x}, x]$

$dt = -\frac{1}{s^2}\,ds$

$$G(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \int_{x}^{1/x} \frac{\ln\left(\frac{1}{s}\right)}{1+\frac{1}{s^2}} \times \frac{-1}{s^2}\,ds$$

$$= -\int_{1/x}^{x} \frac{\ln s}{1+s^2}\,ds = -G(x)$$

donc $\forall x > 0,\ G(x) = 0$