1. On pose $F(x) = \int_0^x \arcsin(\sqrt{t})\,dt$

La fonction $t \longmapsto \arcsin(\sqrt{t})$ est définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$ donc F est définie et de classe C^1 sur $[0,1]$ (th fond. de l'analyse) et :

$$\forall x \in [0,1], \quad F'(x) = \arcsin(\sqrt{x})$$

De même si on pose $G(x) = \int_0^x \arccos(\sqrt{t})\,dt$ alors G est définie et de classe C^1 sur $[0,1]$ et :

$$\forall x \in [0,1], \quad G'(x) = \arccos(\sqrt{x})$$

On remarque que $f(x) = F(\sin^2 x) + G(\cos^2 x)$

Or $x \longmapsto \sin^2 x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[0,1]$.

Donc par composée $x \longmapsto F(\sin^2 x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

De même $x \longmapsto G(\cos^2 x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$

Avec le même raisonnement, on montre que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sin(x+\pi) = -\sin x$

et $\cos(x+\pi) = -\cos x$

donc $\sin^2(x+\pi) = \sin^2 x$ et $\cos^2(x+\pi) = \cos^2 x$

donc
$$f(x+\pi) = F\left(\sin^2(x+\pi)\right) + G\left(\cos^2(x+\pi)\right)$$
$$= F(\sin^2 x) + G(\cos^2 x) = f(x).$$

Ceci prouve que $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique sur } \mathbb{R}}$.

De même $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(-x) = \sin^2 x$ et $\cos^2(-x) = \cos^2 x$

donne que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

Donc $\boxed{f \text{ est paire sur } \mathbb{R}}$.

3. D'après 1. on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2(\cos x)(\sin x) \times F'(\sin^2 x)$$
$$+ 2(-\sin x)(\cos x) \times G'(\cos^2 x)$$
$$= 2\sin(x) \times \cos(x) \times \Big(\arcsin(|\sin x|) - \arccos(|\cos x|)\Big)$$

Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $|\sin x| = \sin x$ et $|\cos x| = \cos x$

et $\arcsin(\sin x) = x = \arccos(\cos x)$

Donc $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est constante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$

Comme f est paire : f est constante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Comme cette intervalle est de longueur π et comme f est π-périodique : $\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$

4. La fonction arccos + arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$. Comme sa dérivée est nulle sur $]-1,1[$, on sait que la fonction arccos + arcsin est constante sur $[-1,1]$.

On $\arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

Donc $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$

Or $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{1/2} \arcsin(\sqrt{t})\,dt + \int_0^{1/2} \arccos(\sqrt{t})\,dt$

$= \int_0^{1/2} \left(\arcsin(\sqrt{t}) + \arccos(\sqrt{t})\right) dt = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{4}$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi}{4}}$