On note $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t+\sin t}$.

1. * La fonction $\theta : t \longmapsto t+\sin t$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall t \in \mathbb{R},\ \theta'(t) = 1+\cos t \geqslant 0$

et $\theta'(t) > 0$ pour $t \notin \{(2k+1)\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$

Donc θ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective sur $\mathbb{R}$.

Elle ne s'annule qu'au plus une fois. Or $\theta(0) = 0$.

Donc θ ne s'annule qu'en 0

* La fonction g est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

* Soit $x > 0$. On a $[x, 2x] \subseteq]0, +\infty[$.

Comme g est continue sur $]0, +\infty[$ alors g est continue sur $[x, 2x]$ donc $f(x) = \int_x^{2x} g(t)\,dt$ est défini.

* Soit $x < 0$. Cette fois $[x, 2x] \subseteq]-\infty, 0[$.

Comme g est continue sur $]-\infty, 0[$ alors g est continue sur $[x, 2x]$ donc $f(x) = \int_x^{2x} g(t)\,dt$ est défini.

* En conclusion $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*}$.

2. La fonction g est impaire donc :

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} g(t)\,dt$

On pose $t = -s$ changement de variable affine donc licite.

$$f(-x) = \int_x^{2x} g(-s)(-ds) = \int_x^{2x} -g(s)(-ds) = \int_x^{2x} g(s)\,ds$$

$$= f(x)$$

Donc f est paire.

3. On pose : $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt$

Comme g est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ on sait d'après le th fondamental de l'analyse que G est définie et de classe C^1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

⚠ On ne peut pas travailler sur $\mathbb{R}^*$ car ce n'est pas un intervalle.

On a : $\forall x > 0$, $f(x) = G(2x) - G(x)$

Donc f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ comme composée et somme de fonctions de classe C^1.

Comme f est paire, elle est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On a :

$$\forall x > 0,\ f'(x) = 2G'(2x) - G'(x)$$

$$= \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin(x)}$$

$$= \frac{2x+2\sin(x) - 2x - \sin 2x}{(x+\sin x)(2x+\sin(2x))} = \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{(x+\sin x)(2x+\sin(2x))}$$

Comme f est paire, f' est impaire.

Donc $\forall x < 0,\ f'(x) = -f'(-x) = -\frac{-2\sin(x) + \sin(2x)}{(-x-\sin x)(-2x-\sin(2x))}$

$$= \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{(x+\sin x)(2x+\sin(2x))}$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{(x+\sin x)(2x+\sin(2x))}}$

4. On suppose $x > 1$

On a $\forall t \in \mathbb{R}$,

En particulier si $t \in [x, 2x]$ alors $t > 1$ donc :

$t+1 \geqslant t + \sin t \geqslant t - 1 > 0$

$$\text{donc } \frac{1}{t+1} \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t-1}$$

Par croissance de l'intégrale on obtient :

$$\forall x > 1, \quad \int_x^{2x} \frac{dt}{t+1} \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}$$

$$\text{dc } \forall x > 1, \quad \Big[\ln(|t+1|)\Big]_x^{2x} \leqslant f(x) \leqslant \Big[\ln(|t-1|)\Big]_x^{2x}$$

$$\text{dc } \forall x > 1, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2x-1) - \ln(x-1)$$

$$\text{dc } \forall x > 1, \quad \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$$

Comme $\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln 2$ et $\ln\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln 2$

on a par encadrement :

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ln 2}$$