TD16Ex1

1. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $P' \in \mathbb{R}[X]$ donc f est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$:

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' = \lambda . f(P) + f(Q)$$

Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $XP \in \mathbb{R}[X]$ donc g est à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$:

$$g(\lambda P + Q) = X.(\lambda P + Q) = \lambda . XP + XQ = \lambda g(P) + g(Q)$$

Donc g est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

2. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$,
$$(f \circ g - g \circ f)(P) = f(g(P)) - g(f(P)) = (XP)' - XP' = P + XP' - XP' = P$$

Donc $\boxed{f \circ g - g \circ f = id_{\mathbb{R}[X]}}$