$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linéaire tq $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

1. Par l'absurde supposons que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$.

On a $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$

donc $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\quad f^3(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

donc $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\quad f^2(f(\vec{x})) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

donc $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\quad f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}(f^2)$

donc $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\quad f(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}(f)$

donc $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\quad f(f(\vec{x})) = \vec{0}_E$

donc $f^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. Absurde.

Donc on a $\operatorname{Ker}(f) \neq \operatorname{Ker}(f^2)$.

2. et 3. Si $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f)$ on a $f(\vec{x}) = \vec{0}_E$

donc $f(f(\vec{x})) = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_E$ car f linéaire

donc $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(f^2)$.

On a $\{\vec{0}_E\} \subseteq \operatorname{Ker}(f) \subsetneq \operatorname{Ker}(f^2) \subseteq \mathbb{R}^3$

Si $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$ alors f est injectif.

Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Donc f^3 aussi par composée.

C'est absurde car $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

D'autre part $\mathrm{Ker}(f^2) \neq \mathbb{R}^3$ car $f^2 \neq 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$.

Ainsi $\{\vec{0}_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(f) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^2) \subsetneq \mathbb{R}^3$.

On passe aux dimensions :

$$0 < \dim(\mathrm{Ker}(f)) < \dim(\mathrm{Ker}(f^2)) < 3$$

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) = 2$.

D'après le th du rang appliqué à f et f^2 :

$rg(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f) = 3 - 1 = \boxed{2}$

et $rg(f^2) = \dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 3 - 2 = \boxed{1}$

Comme $f^3 = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$ on a : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ f^3(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

donc $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ f(f^2(\vec{x})) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$ et $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ f^2(f(\vec{x})) = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

ie $\mathrm{Im}(f^2) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2)$

Par égalité des dimensions : $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Im}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \\ \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \end{array}}$