Ex 11 TD16 $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ $\mathbb{K}$ev avec $\mathbb{F}$ de dim finie.

1) $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})^2$.

Comme $\mathbb{F}$ est de dim finie on sait que f, g et $f+g$ sont de rang fini.

Si $y \in \mathrm{Im}(f+g)$ alors $\exists x \in \mathbb{E},\ y = f(x) + g(x)$

et donc $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$

Donc $\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$

donc $\mathrm{rg}(f+g) \leq \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g)$

$\leq \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\mathrm{Im} g)$

formule de Grassmann

ie : $\boxed{\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)}$

Comme $f = f+g-g = (f+g) + (-g)$ on en déduit que :

$$\mathrm{rg}(f) \leq \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(-g)$$

Mais si $y \in \mathrm{Im}(-g)$ alors $\exists x \in \mathbb{E},\ y = -g(x)$

donc $y = g(-x) \in \mathrm{Im}(g)$

Donc $\mathrm{Im}(-g) \subseteq \mathrm{Im}(g)$.

Et de même $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(-(-g)) \subseteq \mathrm{Im}(-g)$

Donc $\mathrm{Im}(-g) = \mathrm{Im}(g)$ et donc $\mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(g)$

On a donc $rg(f) \leq rg(f+g) + rg(g)$

donc $rg(f) - rg(g) \leq rg(f+g)$

De même $g = f+g-f$ donne $rg(g) - rg(f) \leq rg(f+g)$

Donc $\boxed{|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g)}$

2) On suppose de plus que $f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f+g \in Gl(E)$ dans le cas où $F = E$.

$f \circ g = 0_{\mathcal{L}(E)}$ donne que $Im(g) \subset Ker(f)$

et donc $rg(g) \leq \dim(Ker(f))$.

Mais d'après le théorème du rang :

$\dim(Ker\, f) = \dim(E) - rg(f)$

Donc : $\underline{r(f) + r(g) \leq \dim(E)}$

D'autre part $f+g \in Gl(E)$ donne que $rg(f+g) = \dim(E)$

et donc $\underline{\dim(E) \leq rg(f) + rg(g)}$

En conclusion : $\boxed{rg(f) + rg(g) = \dim(E)}$