Ex 12 du TD16

1. $\dim(E) < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}(E)$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$

Comme $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f^2 = f \circ f$ on sait que $Ker(f) \subset Ker(f^2)$
et $Im(f^2) \subseteq Im(f)$

Montrons $Im(f) \subseteq Im(f^2)$.

Soit $y \in Im(f)$. Alors $\exists x \in E,\ y = f(x)$.

Mais $E = Ker(f) \oplus Im(f)$ donc $\exists ! (a,b) \in Ker(f) \times Im(f),\ x = a+b$

Donc $y = f(a) + f(b) = f(b)$ car $a \in Ker(f)$.

Mais $b \in Im(f)$ donc $\exists c \in E,\ b = f(c)$.

Donc $y = f^2(c)$ donc $y \in Im(f^2)$

On a donc montré que $Im(f) \subseteq Im(f^2)$.

Par double_inclusion : $\boxed{Im(f) = Im(f^2)}$ Donc $rg(f) = rg(f^2)$

Le théorème du rang donne alors :

$$\dim E = rg f + \dim(Ker f) = rg(f^2) + \dim(Ker(f^2))$$

$$\text{donc } \dim(Ker(f)) = \dim(Ker(f^2))$$

Mais on sait déjà que $Ker(f) \subseteq Ker(f^2)$.

Par théorème : $\boxed{Ker(f) = Ker(f^2)}$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$ et $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$

Montrons que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$

D'après le théorème du rang : $\underline{\dim(E) = \dim(\text{Ker} f) + \dim(\text{Im} f)}$

Il reste donc à montrer que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$

Comme $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sev de E, on a $\underline{\{0_E\} \subseteq \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)}$

Réciproquement soit $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

On sait donc que $f(y) = 0_E$ et que $\exists x \in E,\ y = f(x)$

On a donc $f^2(x) = f(y) = 0_E$

donc $x \in \text{Ker}(f^2)$. Comme $\text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f)$ on a $f(x) = 0_E$.

Et donc $y = 0_E$. Ceci prouve que $\underline{\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \subseteq \{0_E\}}$

Comme E est de dimension finie on a montré que :

$$\boxed{E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)}$$

2) E Kev quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$.

$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que

D'après 1 on a $\underline{\text{Ker}(f) \subseteq \text{Ker}(f^2)}$ et $\boxed{\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)}$

Soit $x \in \text{Ker}(f^2)$.

On a donc $f^2(x) = 0_E$ donc $f(f(x)) = 0_E$ donc $f(x) \in \text{Ker} f$.

Or $f(x) \in \text{Im}(f)$ donc $f(x) \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Mais d'après notre hypothèse : $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\}$.

Donc $f(x) = 0_E$ donc $x \in \text{Ker}(f)$. Ceci prouve que $\underline{\text{Ker}(f^2) \subseteq \text{Ker}(f)}$

Par double-inclusion : $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $Ker(f) = Ker(f^2)$ et $Im(f) = Im(f^2)$

Montrons que $E = Ker(f) \oplus Im(f)$.

D'après 1 on a $\underline{Ker(f) \cap Im(f) \subset \{0_E\}}$.

De plus $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont des sev de E donc :

$$\underline{Ker(f) + Im(f) \subseteq E}$$

Réciproquement soit $x \in E$. Alors $f(x) \in Im(f)$.

Comme $Im(f) = Im(f^2)$ on a $f(x) \in Im(f^2)$.

Donc $\exists z \in E,\ f(x) = f^2(z)$.

On a donc $f(x - f(z)) = 0_E$ donc $x - f(z) \in Ker(f)$.

Or $f(z) \in Im(f)$ donc l'égalité $x = x - f(z) + f(z)$

donne que $x \in Ker(f) + Im(f)$.

Ceci prouve que $\underline{E \subseteq Ker(f) + Im(f)}$

On a donc $\boxed{E = Ker(f) \oplus Im(f)}$

Le résultat de 1 est donc vrai en dimension infinie.