Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $v=(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ alors :

$$p(\alpha u+v) = p(\alpha x+x', \alpha y+y', \alpha z+z') = (\alpha x+x'+\alpha z+z', \alpha y+y'+\alpha z+z', 0)$$

$$= \alpha.(x+z, y+z, 0) + (x'+z', y'+z', 0) = \alpha.\,p(u) + p(v)$$

donc p est linéaire. De plus p va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Donc <u>p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$</u>.

Si $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $p \circ p(u) = p(x+z, y+z, 0) = (x+z+0, y+z+0, 0)$

$$= (x+z, y+z, 0) = p(u)$$

Donc $p \circ p = p$. Par th : <u>p est un projecteur</u>.

De plus on sait que p projette sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Par $u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$u \in \mathrm{Ker}(p) \iff \begin{cases} x+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-z \\ y=-z \\ z \text{ qq} \end{cases}$$

Donc <u>$\mathrm{Ker}(p)$ est la droite vectorielle engendrée par $(1,1,-1)$</u>

D'autre part :

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\big(p(1,0,0), p(0,1,0), p(0,0,1)\big) = \mathrm{Vect}\big(\underbrace{(1,0,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(1,1,0)}_{e_1+e_2}\big)$$

$$= \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$$

<u>$\mathrm{Im}(p)$ est le plan vectoriel engendré par (e_1, e_2)</u>