TD16 Ex 18

$$\Theta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$$
$$P \longmapsto P - (X+1).P'$$

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\deg P \leq n$ donc $\deg(P') \leq n-1$

donc $\deg((X+1).P') \leq n$

et donc $\deg \Theta(P) \leq n$.

Ceci prouve que Θ va de $\mathbb{R}_n[X]$ vers $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus si $\alpha \in \mathbb{R}$, et $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ alors :

$$\Theta(\alpha P + Q) = \alpha P + Q - (X+1) \times (\alpha P' + Q') = \alpha (P - (X+1).P') + Q - (X+1).Q'$$
$$= \alpha.\Theta(P) + \Theta(Q).$$

Donc Θ est linéaire.

Ainsi Θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

On sait que $(1, X, \ldots, X^k, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Par théorème, on sait que :

$$\mathrm{Im}(\Theta) = \mathrm{Vect}(\Theta(1), \Theta(X), \ldots, \Theta(X^k), \ldots, \Theta(X^n))$$

or $\Theta(1) = 1 = -\Theta(X)$

et si $k \geq 2$: $\Theta(X^k) = (1-k)X^k - kX^{k-1}$

Donc $\mathrm{Im}(\Theta)$ est engendré par la famille $(\Theta(X^k))_{1 \leq k \leq n}$. Comme c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés, on sait qu'elle est libre. Donc la famille $(\Theta(X), \ldots, \Theta(X^n))$ est une base de $\mathrm{Im}(\Theta)$.

Donc $rg(\Theta) = n$.

Le théorème du rang donne $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = rg(\Theta) + \dim(\mathrm{Ker}\,\Theta)$

donc $\dim(\mathrm{Ker}\,\Theta) = 1$.

On remarque que $X+1 \in \mathrm{Ker}(\Theta)$. Comme $X+1 \neq 0_{\mathbb{R}[X]}$

la famille $(X+1)$ est libre maximale dans $\mathrm{Ker}(\Theta)$ et

est donc une base de $\mathrm{Ker}(\Theta)$.

$$\underline{\mathrm{Ker}(\Theta) = \mathrm{Vect}(X+1)}$$