On suppose $f : E \longrightarrow E$ linéaire et $p \in \mathbb{N}^*$ tq $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

1. Soit $\vec{x} \in E$ tel que $f^{p-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}_E$.

Montrons que la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ scalaires tels que :

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k . f^k(\vec{x}) = \vec{0}_E$$

On a donc :

$$\alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 f(\vec{x}) + \alpha_2 f^2(\vec{x}) + \dots + \alpha_{p-1} . f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0}_E$$

On applique f^{p-1} qui est linéaire :

$$f^{p-1}\left(\alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 f(\vec{x}) + \alpha_2 f^2(\vec{x}) + \dots + \alpha_{p-1} . f^{p-1}(\vec{x})\right) = \vec{0}_E$$

donc $\alpha_0 f^{p-1}(\vec{x}) + \alpha_1 f^p(\vec{x}) + \alpha_2 f^{p+1}(\vec{x}) + \dots + \alpha_{p-1} f^{2p-2}(\vec{x}) = \vec{0}_E$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{p+k}(\vec{x}) = f^k(f^p(\vec{x})) \underset{f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}}{=} f^k(\vec{0}_E) \underset{f \text{ linéaire}}{=} \vec{0}_E$

On a donc $\alpha_0 . f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0_E}$.

Comme $f^{p-1}(\vec{x}) \neq \vec{0_E}$ on obtient $\alpha_0 = 0$.

On le réinjecte dans l'équation de départ :

$$\alpha_1 . f(\vec{x}) + \alpha_2 f^2(\vec{x}) + \dots + \alpha_p . f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0_E}$$

En appliquant f^{p-2} on arrive à :

$$\alpha_1 . f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0_E} \text{ donc } \alpha_1 = 0.$$

On le réinjecte puis applique successivement $f^{p-3}, \dots, f$

pour arriver à :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-2} = 0 \text{ et } \alpha_p . f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{0_E}$$

ce qui donne $\alpha_{p-1} = 0$.

Donc la famille $(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x}))$ est libre.

2. D'après le th de la base incomplète :

$$\text{Card}\left(\vec{x}, f(\vec{x}), \dots, f^{p-1}(\vec{x})\right) \leq \dim(E)$$

ie $\underline{p \leq n}$.