Exc 7 TD 15 $\quad f \in \mathcal{L}(E)$ tq $f^2 - 3f + 2id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$

1. On a $f \circ \frac{-1}{2}(f - 3id_E) = \frac{-1}{2}(f - 3id_E) \circ f = id_E$

Donc $\underline{f \in Gl(E)}$ et $\underline{f^{-1} = -\frac{1}{2}(f - 3id_E)}$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note H_n le prédicat :

" $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{K}^2 ; \; f^n = a_n . f + b_n . id_E$ "

Initialisation : $f^0 = id_E = a_0 . f + b_0 . id_E$

en choisissant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Donc H_0 est vrai.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tq H_n est vrai.

On a donc $f^n = a_n . f + b_n . id_E$.

Donc $f^{n+1} = f \circ f^n = a_n . f^2 + b_n . f$. Mais $f^2 = 3f - 2id_E$ donc

$f^{n+1} = (3a_n + b_n) f - 2a_n . id_E = a_{n+1} f + b_{n+1} . id_E$

en choisissant $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$

Donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence, H_n est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = -2a_n \end{cases}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $z^2 - 3z + 2 = 0$. Les racines sont 1 et 2.

On sait donc que $(a_n) \in \mathrm{Vect}\left((1)_n, (2^n)_n\right)$ ie

$\exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2 ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \lambda + \mu 2^n$.

Or $\begin{cases} a_0 = 0 = \lambda + \mu \\ a_1 = 3a_0 + b_0 = 1 = \lambda + 2\mu \end{cases}$ donc $\begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases}$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 2^n - 1$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = -2a_n = 2 - 2^{n+1}$

donc : $\forall n \geqslant 1,\ b_n = 2 - 2^n$. C'est aussi vrai si $n = 0$.

En conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = (2^n - 1).f + (2 - 2^n).\mathrm{id}_E}$

3. Montrons que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$

Comme f est un endomorphisme de E, $f - \mathrm{id}_E$ et $f - 2\mathrm{id}_E$ en sont aussi. Donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$ sont des sev de E.

On a donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E) \subseteq E$.

Soit $x \in E$ qcq.

Analyse On suppose que $x = a + b$ avec $\begin{cases} a \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \\ b \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E) \end{cases}$

On a $x = a + b$ et $f(a) = a$ et $f(b) = 2b$.

Donc $f(x) = f(a) + f(b) = a + 2b$

On en déduit que $b = f(x) - x$ puis que $a = 2x - f(x)$

Donc si la décomposition de x existe, alors elle est unique.

Donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) + \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$

Synthèse. On pose $b = f(x) - x$ et $a = 2x - f(x)$.

On a
- $a + b = x$
- $f(b) = f^2(x) - f(x)$ Mais $f^2 = 3f - 2id_E$ donc :

  $f(b) = 3f(x) - 2x - f(x) = 2f(x) - 2x = 2b$

  donc $b \in \mathrm{Ker}(f - 2id_E)$
- $f(a) = 2f(x) - f^2(x) = 2f(x) - 3f(x) + 2x = 2x - f(x) = a$

  donc $a \in \mathrm{Ker}(f - id_E)$. Donc une décomposition de x existe.

Donc $\mathbb{E} \subseteq \mathrm{Ker}(f - id_E) + \mathrm{Ker}(f - 2id_E)$.

En conclusion : $\boxed{\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(f - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2id_E)}$