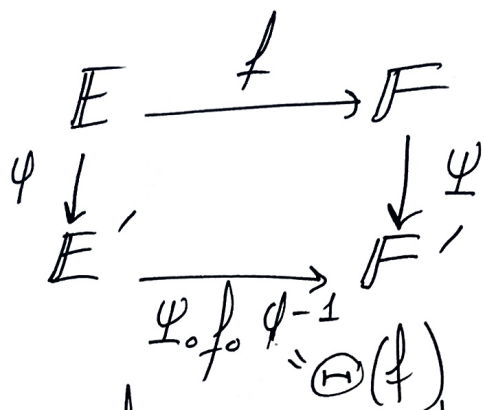


Ex 8 TD 16



Comme φ, f, ψ sont linéaires on sait que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est linéaire.

D'après le diagramme : $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{L}(E', F')$

Donc l'application Ⓜ est bien définie.

Montrons qu'elle est linéaire.

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\begin{aligned} \text{Ⓜ}(\alpha f + g) &= \psi \circ (\alpha f + g) \circ \varphi^{-1} = \alpha \cdot \psi \circ f \circ \varphi^{-1} + \psi \circ g \circ \varphi^{-1} \\ &= \alpha \cdot \text{Ⓜ}(f) + \text{Ⓜ}(g) \end{aligned}$$

Montrons qu'elle est bijective.

Soit $h \in \mathcal{L}(E', F')$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $\text{Ⓜ}(f) = h$.

$$\text{Ⓜ}(f) = h \iff \psi \circ f \circ \varphi^{-1} = h \iff f = \psi^{-1} \circ h \circ \varphi$$

Comme $\psi^{-1} \circ h \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ on a montré que :

$$\forall h \in \mathcal{L}(E', F'), \exists ! f \in \mathcal{L}(E, F), \text{Ⓜ}(f) = h$$

Donc Ⓜ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ vers $\mathcal{L}(E', F')$

$$\begin{array}{ccc} \text{Ⓜ}^{-1} : \mathcal{L}(E', F') & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ h & \longmapsto & \psi^{-1} \circ h \circ \varphi \end{array}$$