Ex 8 TD 16

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \arrow[d, "\Psi"] \\ E' \arrow[r, "\Psi \circ f \circ \varphi^{-1}"'] & F' \end{tikzcd}$$

$$\Psi \circ f \circ \varphi^{-1} = \Theta(f)$$

Comme φ, f, Ψ sont linéaires on sait que $\Psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est linéaire.

D'après le diagramme : $\Psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{L}(E', F')$

Donc l'application Θ est bien définie.

Montrons qu'elle est linéaire.

Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\Theta(\alpha f + g) = \Psi \circ (\alpha f + g) \circ \varphi^{-1} = \alpha . \Psi \circ f \circ \varphi^{-1} + \Psi \circ g \circ \varphi^{-1}$$
$$= \alpha . \Theta(f) + \Theta(g)$$

Montrons qu'elle est bijective.

Soit $h \in \mathcal{L}(E', F')$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que $\Theta(f) = h$.

$$\Theta(f) = h \iff \Psi \circ f \circ \varphi^{-1} = h \iff f = \Psi^{-1} \circ h \circ \varphi$$

Comme $\Psi^{-1} \circ h \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ on a montré que :

$$\forall h \in \mathcal{L}(E', F'), \exists! f \in \mathcal{L}(E, F), \Theta(f) = h$$

Donc Θ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$ vers $\mathcal{L}(E', F')$

$$\Theta^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E', F') & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, F) \\ h & \longmapsto & \Psi^{-1} \circ h \circ \varphi \end{array}$$