

1.  $f$  est dérivable sur  $[0,1]$  car polynomiale.

(1)

$$\forall x \in [0,1], f'(x) = 2px > 0 \text{ sauf si } x = 0$$

$x$	0	1
$f$		1

$1-p > 0$

L'intervalle  $[0,1]$  est stable.

Si  $u_0 = 1-p \in [0,1]$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$

Cherchons les points fixes de  $f$ :

$$f(x) = x \iff px^2 - x + (1-p) = 0$$

$$\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1-p}{p}$$

$\uparrow$  racine évidente                       $\uparrow$  produit des racines

Cas 1  $\frac{1-p}{p} \geq 1$  ie  $1-p \geq p$  ie  $p \leq \frac{1}{2}$

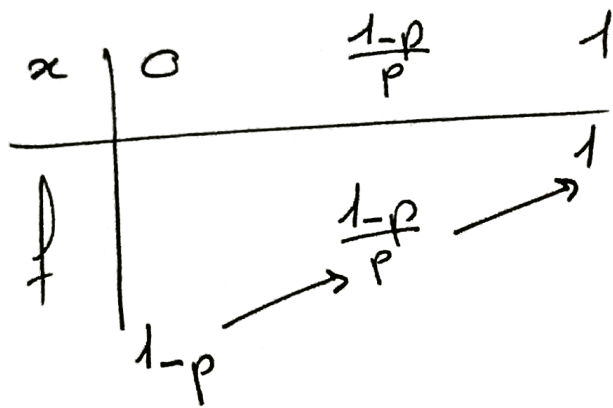
Alors  $\forall x \in [0,1], f(x) - x = p \underbrace{(x-1)}_{\leq 0} \underbrace{(x - \frac{1-p}{p})}_{\leq 0} \geq 0$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc  $(u_n)$  est croissante majorée donc convergente vers

$l \in [0,1]$  point fixe de  $f$  donc vers 1.

Cas 2  $p > \frac{1}{2}$  Alors  $f$  a 2 points fixes dans  $[0,1]$  qui sont  $\frac{1-p}{p} < 1$  et 1.



L'intervalle  $[0, \frac{1-p}{p}]$  (2)

est stable et  $u_0 = 1-p$  est dans cet intervalle donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \frac{1-p}{p}$$

car  $x \in [0, \frac{1-p}{p}]$ ,  $f(x) - x \geq 0$

donc ici aussi  $(u_n)$  est croissante et majorée

donc convergente vers 1 point fixe de  $f$  dans  $[0, \frac{1-p}{p}]$

donc vers  $\frac{1-p}{p}$ .

2. On note  $A =$  "à la 1<sup>ère</sup> génération la plante a deux descendants"

Alors d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 0) = P(A) \times P_A(X_{n+1} = 0) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(X_{n+1} = 0)$$

$$\text{or } P_A(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)^2 \quad \text{car cela revient à}$$

calculer la probabilité que par les deux descendants de la première plante, ils n'aient plus de descendants à la génération  $n$ , et ces deux populations évoluent de manière indépendante.

$$P_A(X_{n+1}=0) = 1.$$

(3)

$$\text{Donc } P(X_{n+1}=0) = p (P(X_n=0))$$

3. Comme  $P(X_0=0) = 1-p = u_0$

on a  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X_n=0) = u_n$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=0) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1-p}{p} & \text{si } p > \frac{1}{2} \end{cases}$$

c'est la probabilité que la population s'éteigne.