1. f est dérivable sur $[0,1]$ car polynomiale.

$\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = 2px > 0$ sauf si $x = 0$

x	0		1
f	$1-p>0$	$\nearrow$	1

L'intervalle $[0,1]$ est stable.

Si $u_0 = 1-p \in [0,1]$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

Cherchons les points fixes de f :

$$f(x) = x \iff px^2 - x + (1-p) = 0$$

$$\iff \underbrace{x = 1}_{\text{racine évidente}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{x = \frac{1-p}{p}}_{\text{produit des racines}}$$

Cas 1 $\frac{1-p}{p} \geqslant 1$ ie $1-p \geqslant p$ ie $p \leqslant \frac{1}{2}$

Alors $\forall x \in [0,1], \quad f(x) - x = p(\underbrace{x-1}_{\leqslant 0})(\underbrace{x - \frac{1-p}{p}}_{\leqslant 0}) \geqslant 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

Donc (u_n) est croissante majorée donc convergente vers $\ell \in [0,1]$ point fixe de f donc vers 1.

Cas 2 $p > \frac{1}{2}$ Alors f a 2 points fixes dans $[0,1]$ qui sont $\frac{1-p}{p} < 1$ et 1.

$$\begin{array}{c|ccccc}
x & 0 & & \frac{1-p}{p} & & 1 \\
\hline
f & 1-p & \nearrow & \frac{1-p}{p} & \nearrow & 1
\end{array}$$

L'intervalle $\left[0, \frac{1-p}{p}\right]$ est stable et $u_0 = 1-p$ est dans cet intervalle donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1-p}{p}.$$

Pour $x \in \left[0, \frac{1-p}{p}\right]$, $f(x) - x \geqslant 0$

donc ici aussi (u_n) est <u>croissante</u> et majorée donc <u>convergente</u> vers 1 point fixe de f dans $\left[0, \frac{1-p}{p}\right]$

donc vers $\underline{\frac{1-p}{p}}$.

<u>2.</u> On note $A =$ "à la 1ère génération la plante a deux descendants"

Alors d'après la formule des probabilités totales:

$$P(X_{n+1}=0) = P(A) \times P_A(X_{n+1}=0) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(X_{n+1}=0)$$

or $P_A(X_{n+1}=0) = P(X_n=0)^2$ car cela revient à calculer la probabilité que pour les deux descendants de la première plante, ils n'aient plus de descendants à la génération n, et ces deux populations évoluent de manière indépendante.

$$\mathbb{P}_{\overline{A}}(X_{n+1}=0)=1.$$

Donc $\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=f\left(\mathbb{P}(X_n=0)\right)$

3. Comme $\mathbb{P}(X_0=0)=1-p=u_0$

on a $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(X_n=0)=u_n$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=0)=\begin{cases}1 & \text{si } p\leqslant\frac{1}{2}\\ \frac{1-p}{p} & \text{si } p>\frac{1}{2}\end{cases}$

c'est la probabilité que la population s'éteigne.