1. Comme $X(\Omega) \subseteq [\![0,N]\!]$ on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{N} k . P(X=k)$$ (les termes en trop dans la somme sont nuls)

Mais pour tout $k \in [\![0,N]\!]$: $(X > k-1) = (X=k) \cup (X > k)$

donc $P(X > k-1) = P(X=k) + P(X > k)$

donc $P(X=k) = P(X > k-1) - P(X > k)$

Donc $$E(X) = \sum_{k=0}^{N} \Big(k . P(X > k-1) - k . P(X > k) \Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \Big(k . P(X > k-1) - (k+1) P(X > k) \Big) + \sum_{k=0}^{N} P(X > k)$$

$$= 0 \times P(X > -1) - (N+1) . P(X > N) + \sum_{k=0}^{N} P(X > k)$$

↑ somme télescopique.

Comme $X(\Omega) \subseteq [\![0,N]\!]$ on a $P(X > N) = 0$

On a donc $$\boxed{E(X) = \sum_{k=0}^{N-1} P(X > k)}$$

2. On a au maximum $X = N$ (dès qu'on tire la boule numéro N) et au minimum $X = n$ (si on tire les

boules numéros $1, 2, \dots, n$).

Donc $X(\Omega) = [\![n, N]\!] \subseteq [\![0, N]\!]$.

Donc d'après 1. on a $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k)$.

On pour $k \in [\![0, N-1]\!]$ on a :

$(X > k) =$ " le + gd numéro pioché est $> k$ "

$=$ " on pioche au moins un numéro $\geq k+1$ "

$(X \leq k) = \overline{(X > k)} =$ " on ne pioche que des numéros $\leq k$ ".

Par dénombrement : $\mathbb{P}(X \leq k) = \dfrac{\binom{k}{n} \times \binom{N-k}{0}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$

$$\text{donc : } \mathbb{P}(X > k) = 1 - \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$$

On a donc $\mathbb{E}(X) = N - \dfrac{1}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \binom{k}{n}$

D'après la formule de Pascal : $\binom{k}{n} + \binom{k}{n+1} = \binom{k+1}{n+1}$

$$\text{donc } \binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$$

Donc par somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \binom{k}{n} = \binom{N}{n+1} - \binom{0}{n+1} = \binom{N}{n+1}$$

somme des éléments d'une colonne dans le triangle de Pascal

On trouve donc : $\mathbb{E}(X) = N - \dfrac{\binom{N}{n+1}}{\binom{N}{n}} = N - \dfrac{N! \times n! \times (N-n)!}{(n+1)! \times (N-n-1)! \times N!}$

$$= N - \frac{N-n}{n+1} = \frac{nN + \cancel{N} - \cancel{N} + n}{n+1}$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{n(N+1)}{n+1}}$

<u>Rem</u> : si $n = 1$ on trouve $\mathbb{E}(X) = \dfrac{N+1}{2}$

ce qui est cohérent car si $n=1$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$