1. Si X suit une loi uniforme alors :

$$\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x) = \frac{1}{N}$$

Donc $H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} -\frac{1}{N} \ln\left(\frac{1}{N}\right) = N \times \left(-\frac{1}{N} \cdot \ln\left(\frac{1}{N}\right)\right)$

ie $\boxed{H(X) = \ln(N)}$

Si X est constante égale à $x \in \mathbb{R}^+$ alors $N = 1$ et :

$$H(X) = f(1) = \boxed{0}$$

2. On a $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x) \in [0,1]$

donc $f(\mathbb{P}(X=x)) \geqslant 0$

Par somme de nombres positifs : $\boxed{H(X) \geqslant 0}$

3. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables.

Donc $\forall t > 0,\ h'(t) = -\ln(t) - 1 + 1 = -\ln t$

t	0		1		$+\infty$
$h'(t)$	‖	$+$	0	$-$	
h			0		
	-1	↗		↘	

Donc $\boxed{\forall t \geq 0,\ h(t) \leq 0}$

Donc $\forall t \geq 0,\ f(t) \leq 1 - t$.

Donc $\forall x \in X(\Omega),\ f(N.\mathbb{P}(X=x)) \leq 1 - N.\mathbb{P}(X=x)$

Par somme d'inégalités:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f\left(N.\mathbb{P}(X=x)\right) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} \left(1 - N.\mathbb{P}(X=x)\right)$$

$$= \text{Card}\left(X(\Omega)\right) - N.\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)$$

$$= N - N \times 1$$

Ainsi $\boxed{\sum_{x \in X(\Omega)} f\left(N.\mathbb{P}(X=x)\right) \leq 0}$

Mais $\forall x \in X(\Omega),\ f\left(N.\mathbb{P}(X=x)\right) = -N.\ln(N).\mathbb{P}(X=x) + N.f\left(\mathbb{P}(X=x)\right)$

On a donc : $-N.\ln(N) + N.H(X) \leq 0$

donc : $\boxed{H(X) \leq \ln(N)}$

4. Une somme de nombres positifs est nuls si, et seulement si, tous ses termes sont nuls.

Et $\forall x \in X(\Omega),\ f(\mathbb{P}(X=x)) \geqslant 0$

Donc $H(X)=0 \iff \forall x \in X(\Omega),\ f(\mathbb{P}(X=x))=0$

$\iff \forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x)=0$ ou 1

$\iff N=1$

puisqu'on doit avoir $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)=1$.

Donc : $\boxed{H(X)=0 \iff X \text{ est constante}}$

5. D'après les calculs de la question 3. on a :

$H(X)=\ln N \iff \sum_{x \in X(\Omega)} f(N.\mathbb{P}(X=x))=0$

$\iff \forall x \in X(\Omega),\ f(N.\mathbb{P}(X=x))=1-N.\mathbb{P}(X=x)$

$\iff \forall x \in X(\Omega),\ N.\mathbb{P}(X=x)=1$

Donc : $H(X)=\ln(N) \iff X \hookrightarrow \mathcal{U}(X(\Omega))$

Rem : $H(X)$ mesure donc la dispersion de la VAR X.