On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ ie que

$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Comme $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ le théorème de transfert nous donne :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} . \mathbb{P}(X=k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} . \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Mais d'après la formule du pion :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+1} \frac{k+1}{n+1} \binom{n+1}{k+1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

Donc $$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}$$
$$= \frac{1}{(n+1)p} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k}$$
$$= \frac{1}{(n+1)p} \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} - (1-p)^{n+1} \right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)p} \left((1-p+p)^{n+1} - (1-p)^{n+1} \right) = \boxed{\frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}}$$