Urne : ① ② - ---- (N-1) (N)

On en pioche $n$ simultanément

$|\Omega| = \binom{N}{n}$ $X$ = plus grand numéro obtenu

1. Si $n = 1$ on pioche seulement une boule

donc $X$ = numéro pioché

donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)}$

2. Cas extrêmes :

* si on ne pioche que les boules avec les + petits numéros, comme on en pioche $n$ :

① ② . . . ($n$)

donc ici $X = n$

* si on ne pioche que les boules avec les + grands numéros :

($N-n+1$) . . . . . ($N-1$) ($N$)

donc $X = N$

* Donc $X$ est à valeurs dans $\llbracket n, N \rrbracket$ :

$\boxed{X(\Omega) = \llbracket n, N \rrbracket}$

* Pour tout $k \in [\![n, N]\!]$ :

$(X=k)$ = "sur les $n$ numéros, le + grand est $k$"

= "on pioche $n-1$ numéros inférieurs ou égal à $k-1$, 1 numéro égal à $k$, 0 numéro supérieur ou égal à $k+1$"

donc $|(X=k)| = \binom{k-1}{n-1}\binom{1}{1}\binom{N-k}{0} = \binom{k-1}{n-1}$

Finalement : $\boxed{\forall k \in [\![n, N]\!], \ \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}}$

3. On a $X(\Omega) = [\![n, N]\!]$ donc :

$$\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(X=k) = 1$$

ie $$\sum_{k=n}^{N} \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = 1$$

ie $$\sum_{k=n}^{N} \binom{k-1}{n-1} = \binom{N}{n}$$

ie $$\sum_{k=n-1}^{N-1} \binom{k}{n-1} = \binom{N}{n}$$ en changeant d'indice : $k' = k-1$

Si on remplace l'"énoncé" par "on pioche $n+1$ boules dans une urne de $N+1$ boules",

on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}}$$

Comme $X(\Omega) = [\![n, N]\!]$ on a par définition :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=n}^{N} k \times \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{N} k \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} k \binom{k-1}{n-1}$$

D'après la formule du pion :

$$\forall k \in [\![n, N]\!], \quad k \binom{k-1}{n-1} = k \frac{n}{k} \binom{k}{n} = n \binom{k}{n}$$

Donc :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} n \binom{k}{n} = \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n}$$

$$= \frac{n}{\binom{N}{n}} \binom{N+1}{n+1}$$

Encore une fois la formule du pion nous donne :

$$\binom{N+1}{n+1} = \frac{N+1}{n+1}\binom{N}{n}$$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{n(N+1)}{n+1}}$

Vérification Si $n=1$ on trouve $\mathbb{E}(X) = \frac{N+1}{2}$

qui est bien l'espérance de $\mathcal{U}([\![1, N]\!])$.

4. Comme $X(\Omega) = [\![n, N]\!]$ le théorème de transfert nous donne :

$$\mathbb{E}\big(X(X+1)\big) = \sum_{k=n}^{N} k(k+1) \times \mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=n}^{N} k(k+1)\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=n}^{N} k(k+1) \times \binom{k-1}{n-1}$$

Encore une utilisation de la formule du pion :

$\forall k \in [\![n, N]\!]$, $\quad k\binom{k-1}{n-1} = k\frac{n}{k}\binom{k}{n} = n\binom{k}{n}$

et $(k+1)\binom{k}{n} = (k+1)\frac{n+1}{k+1}\binom{k+1}{n+1} = (n+1)\binom{k+1}{n+1}$

donc $k(k+1)\binom{k-1}{n-1} = n(n+1)\binom{k+1}{n+1}$

On obtient :

$$\mathbb{E}\left(X(X+1)\right) = \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} \binom{k+1}{n+1} = \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n+1}^{N+1} \binom{k}{n+1}$$

$$= \frac{n(n+1)}{\binom{N}{n}} \binom{N+2}{n+2}$$

Mais $\binom{N+2}{n+2} = \frac{N+2}{n+2}\binom{N+1}{n+1} = \frac{N+2}{n+2} \times \frac{N+1}{n+1} \times \binom{N}{n}$

$$\text{Donc } \mathbb{E}\left(X(X+1)\right) = \frac{n}{n+2} \times (N+1)(N+2)$$

Mais par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}\left(X(X+1)\right) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)$$

Donc d'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left(X(X+1)\right) - \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \frac{n(N+1)(N+2)}{n+2} - \frac{n(N+1)}{n+1} - \frac{n^2(N+1)^2}{(n+1)^2}$$

$$V(X) = \frac{n(N+1)}{(n+1)^2(n+2)} \times \Big( (N+2)(n+1)^2 - (n+1)(n+2) - n(N+1)(n+2) \Big)$$

$$= \frac{n(N+1)}{(n+1)^2(n+2)} \Big( \cancel{Nn^2} + \cancel{2n^2} + \cancel{2nN} + 4n + N + \cancel{2} - \cancel{n^2} - 3n - \cancel{2} - \cancel{n^2 N} - \cancel{2nN} - \cancel{n^2} - 2n \Big)$$

$$= \frac{n(N+1)}{(n+1)^2(n+2)} (N-n)$$

Donc $\boxed{V(X) = \frac{n(N+1)(N-n)}{(n+1)^2(n+2)}}$

<u>Rem:</u> pour $n = 1$ on trouve $V(X) = \frac{N^2-1}{12}$

ce qui est bien la variance de $\mathcal{U}(\{1, 2, \dots, N\})$