Urne de N boules : r blanches et $N-r$ noires

1 2 ..... r

1 2 .... $N-r$

On pioche les boules une par une, sans remise, jusqu'à avoir toutes les blanches en main.

X = "nombre de tirages effectués"

1. $r=1$

1

1 2 ..... $N-1$

1 seule boule blanche

D'après l'exercice du concierge dans le cours :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,N]\!])$$

ie $X(\Omega)=[\![1,N]\!]$ et $\forall k \in [\![1,N]\!]$, $\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{N}$

On sait que $\mathbb{E}(X)=(N+1)/2$

$r=N$ 1 2 ..... N Toutes les boules sont blanches.

X est constante égale à N.

Donc $\mathbb{E}(X)=N$.

2. (a) * Pour avoir les r blanches il faut piocher au minimum r boules. La r-ième boule blanche

peut être obtenu tout à la fin, lorsque c'est la dernière boule de l'urne.

Donc $\boxed{X(\Omega) = [\![r, N]\!]}$

* Soit $k \in [\![r, N]\!]$

$(X=k)$ = " le k-ième tirage donne la r-ième boule blanche "

$= A \cap B$

où A = " les $k-1$ premiers tirages ont donné au total $r-1$ blanches "

B = " le k-ième tirage donne une blanche "

A priori A et B ne sont pas indépendants.

On a :

$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

Par dénombrement : $\mathbb{P}(A) = \dfrac{A_r^{r-1} \times A_{N-r}^{k-r} \times \binom{k-1}{r-1}}{A_N^{k-1}}$

Et $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{1}{N-k+1}$

Donc $\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{N-k+1} \times \binom{k-1}{r-1} \times \frac{A_r^{r-1} \times A_{N-r}^{k-r}}{A_N^{k-1}}$

$$= \frac{1}{\cancel{N-k+1}} \times \frac{(k-1)!}{(r-k)!(r-1)!} \times \frac{r!\,(N-r)!\,\cancel{(N-k+1)!}}{1!\,\cancel{(N-k)!}\;\;N!}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}} \text{ pour tout } k \in [\![r, N]\!]}$$

<u>2.(b)</u> Comme $X(\Omega) = [\![r, N]\!]$ on a d'après le th de transfert :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=r}^{N} k.\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} k\binom{k-1}{r-1}$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} r\binom{k}{r}$$ avec la formule du pion

$$= \frac{r}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r}$$

Il reste à calculer $\sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r}$.

<u>méthode 1</u> Avec la formule de Pascal :

$$\sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r} = \sum_{k=r}^{N} \left[\binom{k+1}{r+1} - \binom{k}{r+1}\right]$$

On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=r}^{N}\binom{k}{r}=\binom{N+1}{r+1}-\underbrace{\binom{r}{r+1}}_{=0}=\binom{N+1}{r+1}$$

<u>méthode 2</u> Avec la loi de X.

Comme $X(\Omega)=[\![r,N]\!]$:

$$\sum_{k=r}^{N}\mathbb{P}(X=k)=1 \quad \text{donc} \quad \sum_{k=r}^{N}\binom{k-1}{r-1}=\binom{N}{r}$$

$$\text{donc} \quad \sum_{k=r-1}^{N-1}\binom{k}{r-1}=\binom{N}{r}$$

Et si on refait l'exercice avec une urne de $N+1$ boules dont $r+1$ blanches :

$$\sum_{k=r}^{N}\binom{k}{r}=\binom{N+1}{r+1}$$

On trouve $\mathbb{E}(X)=\dfrac{r}{\binom{N}{r}}\binom{N+1}{r+1}$

Avec la formule du pion : $\binom{N+1}{r+1}=\dfrac{N+1}{r+1}\binom{N}{r}$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(X)=\dfrac{r(N+1)}{r+1}}$ et d'après 1. cette formule est vraie si $r=1$ ou $r=N$