1. Avec la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0 + abc + abc - (0 + 0 + 0) = 2abc$$

2. $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & b \\ a+b+c & c & a \end{vmatrix}$$ $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$ par linéarité p/r à la $1^{ère}$ colonne

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}$$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$= (a+b+c) \times \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ c-b & a-c \end{vmatrix}$$ en développant par rapport à la $1^{ère}$ colonne

$$= (a+b+c) \times \left((a-b)(a-c) - (c-b)(b-c)\right)$$

$$= (a+b+c) \times \left(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac)\right)$$

3.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & c-a & c-b \\ a^2+b^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ a^3+b^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 2c & c-a & c-b \\ 2c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ 2c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= 2 \begin{vmatrix} c & c-a & c-b \\ c^2 & c^2-a^2 & c^2-b^2 \\ c^3 & c^3-a^3 & c^3-b^3 \end{vmatrix} \quad \text{par linéarité p/r à la 1ère colonne}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} c & -a & -b \\ c^2 & -a^2 & -b^2 \\ c^3 & -a^3 & -b^3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} \quad \text{par multilinéarité}$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - cL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - c^2L_1 \end{array}$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ a^2-c^2 & b^2-c^2 \end{vmatrix} \quad \text{en dvpt p/r à la 1ère colonne}$$

$$= 2ab(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+c & b+c \end{vmatrix} \quad \text{par multilin.}$$

$$= 2ab(a-c)(b-c)(b-a)$$

4. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix}$ en effectuant dans cet ordre :
$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$= a(b-a)(c-b)(d-c)$ car déterminant triangulaire

5. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+2c & c & c & b \\ a+b+2c & a & b & c \\ a+b+2c & b & a & c \\ a+b+2c & c & c & a \end{vmatrix}$ $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$= (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & a & c \\ 1 & c & c & a \end{vmatrix}$ par linéarité par rapport à la 1ère colonne

$= (a+b+2c) \begin{vmatrix} 1 & c & c & b \\ 0 & a-c & b-c & c-b \\ 0 & b-c & a-c & c-b \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$= (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} 1 & c & c \\ 0 & a-c & b-c \\ 0 & b-c & a-c \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la dernière ligne

$= (a+b+2c)(a-b) \begin{vmatrix} a-c & b-c \\ b-c & a-c \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la 1ère colonne

$= (a+b+2c)(a-b)\left((a-c)^2 - (b-c)^2\right)$

$= (a+b+2c)(a-b)^2(a+b-2c)$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos a & \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \sin a & \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{vmatrix}$ $\begin{array}{l} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \end{array}$

$= \begin{vmatrix} \cos b - \cos a & \cos c - \cos a \\ \sin b - \sin a & \sin c - \sin a \end{vmatrix}$ en développant par rapport à la 1ère ligne

$= \begin{vmatrix} -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right) & -2\sin\left(\frac{a+c}{2}\right)\sin\left(\frac{c-a}{2}\right) \\ 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{b-a}{2}\right) & 2\cos\left(\frac{a+c}{2}\right)\sin\left(\frac{c-a}{2}\right) \end{vmatrix}$

$= -4\sin\left(\frac{b-a}{2}\right) \times \sin\left(\frac{c-a}{2}\right) \times \begin{vmatrix} \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) & \sin\left(\frac{a+c}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) & \cos\left(\frac{a+c}{2}\right) \end{vmatrix}$

par multilinéarité

$= -4\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+c}{2}\right) - \sin\left(\frac{a+c}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$

$= -4\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c-a}{2}\right)\sin\left(\frac{b-c}{2}\right)$