1. On note Δ_n le déterminant à calculer.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots b & a \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$$

$$= \left(a+(n-1)b\right) \times \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots b & a \end{vmatrix}$$

$$= \left(a+(n-1)b\right) \times \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - L_1 \end{matrix}$$

$$= \left(a+(n-1)b\right) \times (a-b)^{n-1}$$

2. En sommant toutes les colonnes sur la première :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 1 & 1 & \ddots & & 3 \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

En retranchant à chaque ligne la précédente (en commençant par la fin) :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \end{vmatrix}$$

On développe selon la première colonne et on se ramène à :

$$D_n = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

avec $a = 1 - n$ et $b = 1$

On arrive à $D_n = \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} n^{n-2}$