1. On note $\mathcal{B}_{cano} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

* f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ie $A = \mathrm{Mat}(f ; \mathcal{B}_{cano})$

Si $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ alors $\mathrm{Mat}(\vec{u} ; \mathcal{B}_{cano}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

donc $\mathrm{Mat}(f(\vec{u}) ; \mathcal{B}_{cano}) = A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y + 2z \\ -3y - 2z \\ 4y + 3z \end{pmatrix}$

donc $f(x, y, z) = (x + 4y + 2z, -3y - 2z, 4y + 3z)$

* $\vec{u_1} = (1, -1, 1)$

$\vec{u_2} = (1, 0, 0)$

$\vec{u_3} = (0, -1, 2)$

Si on note $\mathcal{B}_{cano}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors :

$$\mathrm{Mat}(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3} ; \mathcal{B}_{cano}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

or $$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Donc $\mathrm{Mat}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}; \mathcal{B}_{cano})$ est inversible.

Donc $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

* On a $f(\overrightarrow{u_1}) = f(1,-1,1) = (-1,1,-1) = -\overrightarrow{u_1}$

$f(\overrightarrow{u_2}) = f(1,0,0) = (1,0,0) = \overrightarrow{u_2}$

$f(\overrightarrow{u_3}) = f(0,-1,2) = (0,-1,2) = \overrightarrow{u_3}$

donc $\mathrm{Mat}(f; \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{def}}{=} A'$ Elle est diagonale

* D'après le cours si on pose $P \overset{\text{def}}{=} P_{\mathcal{B}_{cano} \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

alors P est inversible et $A = PA'P^{-1}$

2. * Cette fois :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad g(x,y,z)=\left(3x-3y-2z,\,-2x+y+2z,\,3x-2y-2z\right)$$

* $$\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}=3$$

donc $\mathcal{B}=(\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

* $g(\vec{v_1})=(1,0,1)=\vec{v_1}$

$g(\vec{v_2})=(-1,-1,0)=-\vec{v_1}-\vec{v_2}$

$g(\vec{v_3})=(4,-1,3)$

on cherche $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tq $g(\vec{v_3})=a\vec{v_1}+b\vec{v_2}+c\vec{v_3}$

$$\begin{cases}4=a+c\\-1=b-c\\3=a-b+c\end{cases}\iff\begin{cases}4=a+c\\-1=b-c\\-1=-b\end{cases}\ L_3\leftarrow L_3-L_1$$

$$\iff\begin{cases}a=2\\b=1\\c=2\end{cases}$$

donc $g(\vec{v_3})=2\vec{v_1}+\vec{v_2}+2\vec{v_3}$

Donc $$\text{Mat}(g;\mathcal{B})=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-1&1\\0&0&2\end{pmatrix}\overset{\text{def}}{=}A'$$ Elle est triangulaire supérieure

* D'après le cours si on pose $P \stackrel{\text{def}}{=} P_{\mathcal{B}_{cano} \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

alors P est inversible et $A = PA'P^{-1}$