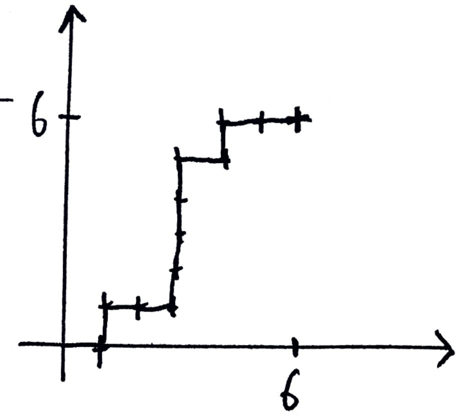
TP2 Ex 27

1.(a)



1.(b) 12 déplacements : 6 vers le haut et 6 vers la droite

1.(c) cf 1.(b)

1.(d) On a donc $\binom{12}{6}$ chemins monotones de $(0,0)$ à $(6,6)$

2. Il faut se déplacer n fois, dont p fois vers le haut.

Donc $\binom{n}{p}$ chemins possibles.

3. On compte les chemins reliant $(0,0)$ à $(n-p,p)$ en distinguant 2 cas :

cas 1 le chemin commence par un pas vers le haut.

Cela revient à compter les chemins reliant $(0,1)$ à $(n-p,p)$, donc les chemins reliant $(0,0)$ à $(n-p,p-1)$.

Il y en a $\binom{n-1}{p-1}$.

cas 2 le chemin commence par un pas vers la droite.

Cela revient à compter les chemins reliant $(1,0)$ à $(n-p,p)$, donc les chemins reliant $(0,0)$ à $(n-p-1,p)$.

Il y en a $\binom{n-1}{p}$.

En tout il y a $\binom{n}{p}$ chemins reliant $(0,0)$ à $(n-p,p)$.

On a donc : $\binom{n}{p}=\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}$.

4. OK

5.(a) B_k a pour coordonnées $(k,n-k)$ donc le nombre de chemins reliant O à B_k est $\binom{n}{k}$.

5.(b) Cela revient à compter les chemins reliant $(0,0)$ à $(n-k,n-(n-k))$ donc il y en a $\binom{n}{k}$.

5.(c) Au total il y a donc $\binom{n}{k}^2$ chemins reliant O à A en passant par B_k.

6. Il y a $\binom{2n}{n}$ chemin reliant O à A.
Par disjonction de cas, ces chemins coupent la droite (Δ) pour la première fois en un point B_k où k peut prendre toute valeur dans $[\![0,n]\!]$.
On en déduit que $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$