1. $$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \sin(x) - x$$

f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme de fonctions qui le sont :

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0$

et $f'(x) < 0$ si $x \neq 0$

donc f est <u>strictement</u> décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

x	0	$\pi/2$
f	0 ↘	$1 - \frac{\pi}{2}$

donc $\boxed{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \ f(x) < 0}$

De plus $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \in]0, 1]$ donc $\sin(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ est stable par la fonction $\sin$.

Comme $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a par récurrence immédiate : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) \leqslant 0$ ie $\sin(u_n) - u_n \leqslant 0$

ie $u_{n+1} \leqslant u_n$

donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_n \text{ est décroissante.}}$

Comme elle est minorée par 0 on sait d'après le théorème de la limite monotone qu'elle converge vers un réel ℓ. Par prolongement des inégalités :

$$0 \leqslant \ell \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(u_n) = u_{n+1}$ et $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$

donc par unicité de la limite et continuité de sinus sur $\mathbb{R}$: $\sin(\ell) = \ell$ ie $f(\ell) = 0$ ie $\boxed{\ell = 0}$

2.(a) On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$

donc $\sin(x) - x \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$

Or $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6}$

Par comparaison de séries à termes positifs les séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum -\frac{u_n^3}{6}$ sont de même nature.

Comme la suite (u_n) converge vers 0, on sait d'après le théorème de dualité suites-séries que la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Donc la série $\sum -\frac{u_n^3}{6}$ converge et donc la série $(-6) \sum -\frac{u_n^3}{6} = \sum u_n^3$ converge.

2.(b) On a $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right)$

or $\frac{\sin x}{x} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$

Comme $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$: $\frac{\sin u_n}{u_n} \underset{n \to +\infty}{=} 1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$

et en particulier $\frac{\sin u_n}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

On a $\ln(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} h$

donc $\ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right) = \ln\left(1+\frac{\sin u_n}{u_n}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sin u_n}{u_n} - 1$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{6}$$

Ainsi $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{6}$

Par comparaison de séries à termes positifs les séries $\sum\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right)$ et $\sum -\frac{u_n^2}{6}$ sont de même nature.

Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ on a $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

donc la suite $(\ln(u_n))_n$ diverge, donc d'après le théorème de dualité suites-séries la série $\sum\left(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\right)$ diverge.

Donc la série $\sum -\frac{u_n^2}{6}$ diverge donc la série $(-6)\cdot \sum -\frac{u_n^2}{6} = \sum u_n^2$ diverge.