Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note S_n la quantité de rhum (en litre, en supposant que la bouteille fait 1L au départ) bue par Jack au bout de n tours.

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}$$

$$\vdots$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

car $2^{2k} = 4^k$

or $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{4}\right)^n$ converge, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Au final Jack aura bu

$$S = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$ L de rhum.