1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} . a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} . a_{2n+1}$$

$$= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{car } (a_n) \searrow$$

donc la suite (S_{2n}) est $\searrow$

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} . a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} . a_{2n+2}$$

$$= -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0 \quad \text{car } (a_n) \nearrow$$

donc la suite (S_{2n+1}) est $\nearrow$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{\text{bornée}} . \underbrace{a_{2n+1}}_{\text{convergente vers } 0}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$

Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

1. (b) D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite.
D'après le théorème des suites extraites recouvrantes (S_n) est donc une suite convergente.

Par déf : la série $\sum (-1)^n . a_n$ est convergente.

1.(c) On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . a_n$

Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes de limite S :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2}$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leq S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; \left| \sum_{k=2n+2}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{2n+2}$

Donc si n pair non nul : $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$

donc $-a_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leq S - S_{2n} \leq 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; \left| \sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{2n+1}$

Donc si n impair : $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n.$

Par disjonction de cas : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n}$

2. si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = 1$ ou $+\infty$ donc la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)_n$

ne converge pas vers 0.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est alors grossièrement divergente.

Si $\alpha > 0$: la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ est positive, décroissante de limite nulle.

D'après 1. la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Ccl : $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 0}$

Rem : Si $\alpha > 1$ la convergence est absolue

De même si $\alpha \leq 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right)_n$ ne tend pas vers 0

donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ diverge grossièrement.

Si $\alpha > 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

comme $\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$ on a :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{x_n} \underbrace{- \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{y_n}$$

D'après ce qui précède la série $\sum x_n$ converge car $\alpha > 0$

$$y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum y_n$ converge ssi $2\alpha > 1$ ie $\alpha > \frac{1}{2}$

Pour $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ diverge

et pour $\alpha > \frac{1}{2}$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge.

Ccl : $\boxed{\text{la série } \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \text{ converge } \Longleftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}}$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

alors que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

Pourtant $$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Donc si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ il est possible que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient de nature différente.