1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, on obtient que la série $\sum u_n$ est convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

On cherche a, b, c réels tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

On trouve $a = c = \frac{1}{2}$ et $b = -1$

On a donc $S_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$

⚠ On ne peut pas écrire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$$

car ces 3 termes sont des sommes de séries divergentes

Par changements d'indice :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)-\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}$.

On en déduit que la série $\sum u_n$ converge (on le savait déjà) et que :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}}$$

2. $u_n = \frac{6}{5^{n+2}} = \frac{6}{25}\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Comme $-1<\frac{1}{5}<1$ on sait que la série géométrique $\sum\left(\frac{1}{5}\right)^n$ converge. En multipliant par la constante $\frac{6}{25}$ on en déduit que la série $\sum u_n$ <u>converge</u>.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{6}{25}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{6}{25}\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{6}{25}\times\frac{5}{4} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

Soit $x \in]-1,1[$. Montrons que la série $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

Soit $x \in]-1,1[$.

D'après les croissances comparées : $\lim_{n\to+\infty} n^3 |x|^n = 0$ car $|x|<1$

donc $\lim_{n\to+\infty} n^3 . |x|^{n-1} = 0$

Donc $n|x|^{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et donc $n.|x|^{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha=2>1$)

on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que la série $\sum n x^{n-1}$ converge absolument, et donc converge.

D'autre part si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+1)x^n - n x^n = x^n$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ car les trois séries convergent

donc $\sum_{n=2}^{+\infty} n x^{n-1} - x . \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{1-x}$

donc $-1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} - x . \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{1-x}$

Finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \times \left(\frac{x}{1-x} + 1\right) = \boxed{\frac{1}{(1-x)^2}}$

On va utiliser ce résultat pour 3. et 4.

3. $u_n = \frac{2n}{3^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

Comme $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ les croissances comparées donnent que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$ et donc $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On sait en déduire que $\sum u_n$ converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{3^n} = 0 + \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

4. $u_n = (-1)^n \times \frac{n+3}{5^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$

On a $n^2 |u_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^3}{5^n}$ or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3}{5^n} = 0$ par croissances comparées

Donc $|u_n| \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

On sait en déduire que $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{5}\right)^n + 3 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

$$= 0 - \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 3 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n$$

$$= -\frac{1}{5} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{5}\right)^2} + 3 \times \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = -\frac{1}{5} \times \frac{5^2}{6^2} + 3 \times \frac{5}{6} = \boxed{\frac{85}{36}}$$

5. $u_n = \ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$ avec $n \geqslant 2$

$$= 3.\ln(n) - \ln(n+2) - 2.\ln(n-1)$$

On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$

Par changement d'indices :

$$S_n = 3.\sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=4}^{n+2} \ln(k) - 2.\sum_{k=1}^{n-1} \ln(k)$$

$$= 3\times\left(\ln(2) + \ln(3) + \sum_{k=4}^{n} \ln(k)\right) - \left(\sum_{k=4}^{n} \ln(k) + \ln(n+1) + \ln(n+2)\right)$$

$$- 2\times\left(\sum_{k=4}^{n} \ln(k) + \ln(3) + \ln(2) + \ln(1) - \ln(n)\right)$$

$$= \ln(2) + \ln(3) + \ln\left(\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln(2) + \ln(3) + 0$

Donc la série $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \boxed{\ln(2) + \ln(3)} = \ln(6)$$