1. Pour $n \geqslant 2$: $u_n = \dfrac{1}{n.\ln(n)}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k.\ln(k)}$

On note $f :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application definie par $f(t) = \dfrac{1}{t.\ln t}$

On a f derivable sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall t > 1,\ f'(t) = -\frac{1+\ln(t)}{t^2.\ln^2(t)} \text{ du signe de } -(1+\ln t).$$

Or : $1+\ln(t) \geqslant 0 \iff \ln(t) \geqslant -1 \iff t \geqslant e^{-1}$ VRAI car $t > 1$

t	1		$+\infty$
$f'(t)$	||	$-$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	0

f est donc décroissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

Soit $n \geqslant 2$: on a $\forall t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{(n+1).\ln(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{t.\ln t} \leqslant \dfrac{1}{n.\ln(n)}$

$$\text{donc } \frac{1}{(n+1).\ln(n+1)} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t.\ln t} \leqslant \frac{1}{n.\ln(n)}$$

$$\text{donc } \frac{1}{(n+1).\ln(n+1)} \leqslant \Big[\ln(|\ln t|)\Big]_n^{n+1} \leqslant \frac{1}{n.\ln(n)}$$

$$\text{donc } \frac{1}{(n+1).\ln(n+1)} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leqslant \frac{1}{n.\ln(n)}$$

Par somme d'inégalités on obtient :

$\forall n \geqslant 2, \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k+1).\ln(k+1)} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k)\Big) \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln(k)}$

ie $\forall n \geqslant 2, S_n + \dfrac{1}{(n+1).\ln(n+1)} - \dfrac{1}{2.\ln 2} \leqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leqslant S_n$

On a $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

donc $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

La série $\sum \dfrac{1}{n \ln(n)}$ est donc divergente.

<u>Rem:</u> en poussant les calculs on a $S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$

<u>2.</u> Pour $n \geqslant 2$: $u_n = \dfrac{1}{n.\ln^2(n)}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k.\ln^2(k)}$

On note $f :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$f(t) = \dfrac{1}{t.\ln^2(t)}$

f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et :

$\forall t > 1, \; f'(t) = -\dfrac{\ln^2(t) + 2\ln t}{t^2.\ln^4(t)} = -\dfrac{\ln(t) \times (\ln t + 2)}{t^2.\ln^4(t)}$

du signe de $-(\ln t + 2)$

donc < 0 puisque $t > 1$.

t	1		$+\infty$
$f'(t)$	$\|\|$	$-$	
f	$\|\|$	$+\infty \searrow$	0

f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Soit $n \geq 2$.

On a $\forall t \in [n, n+1]$, $\dfrac{1}{(n+1) \times \ln(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{t.\ln^2(t)} \leq \dfrac{1}{n.\ln(n)^2}$

donc $\dfrac{1}{(n+1) \times \ln(n+1)^2} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{dt}{t.\ln^2(t)} \leq \dfrac{1}{n.\ln(n)^2}$

donc $\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2} \leq \left[-\dfrac{1}{\ln t}\right]_n^{n+1} \leq \dfrac{1}{n.\ln(n)^2}$

donc $\dfrac{1}{(n+1).\ln(n+1)^2} \leq \dfrac{1}{\ln(n)} - \dfrac{1}{\ln(n+1)} \leq \dfrac{1}{n.\ln(n)^2}$

Par somme d'inégalités on obtient :

$\forall n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{\ln k} - \dfrac{1}{\ln(k+1)}\right) \leq \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k \ln(k)^2}$

ie $\forall n \geq 2$, $S_n + \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2} - \dfrac{1}{2\ln^2(2)} \leq \dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln(n+1)} \leq S_n$

donc :

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq S_n \leq \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2} + \frac{1}{2\ln^2(2)}$$

Or $$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2} + \frac{1}{2\ln(2)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln(2)^2}$$

donc (S_n) ne peut pas diverger vers $+\infty$.

Comme c'est une suite croissante (c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs) elle est convergente.

La série $\sum \frac{1}{n.\ln(n)^2}$ est donc convergente.

<u>Rem:</u> En poussant les calculs on montre que

$$R_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k.\ln(k)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$$