

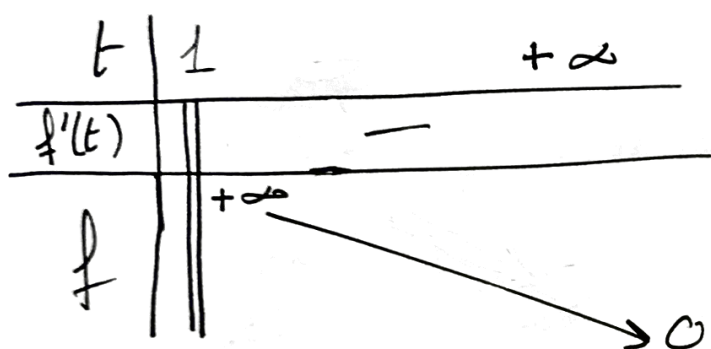
1. Pour $n \geq 2$: $u_n = \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ et $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot \ln(k)}$

On note $f:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(t) = \frac{1}{t \cdot \ln t}$

On a f dérivable sur $]1, +\infty[$ et:

$$\forall t > 1, f'(t) = -\frac{1 + \ln(t)}{t^2 \cdot \ln^2(t)} \text{ du signe de } -(1 + \ln t).$$

Or: $1 + \ln(t) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(t) \geq -1 \Leftrightarrow t \geq e^{-1}$ VRAI car $t > 1$



f est donc décroissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Soit $n \geq 2$: on a $\forall t \in [n, n+1], \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} \leq \frac{1}{t \cdot \ln t} \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

donc $\frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t \cdot \ln t} \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

donc $\frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} \leq [\ln(\ln t)]_n^{n+1} \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

donc $\frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$

Par somme d'inégalités on obtient:

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1) \cdot \ln(k+1)} \leq \sum_{k=2}^n \left(\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln k) \right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot \ln(k)}$$

$$\text{ie } \forall n \geq 2, S_n + \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)} - \frac{1}{2 \cdot \ln 2} \leq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \leq S_n$$

$$\text{On a } \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

$$\text{donc } S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

La série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ est donc divergente.

Rem: en passant les calculs on a $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$

$$\underline{2.} \text{ Pour } n \geq 2: u_n = \frac{1}{n \cdot \ln^2(n)} \text{ et } S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \cdot \ln^2(k)}$$

On note $f:]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

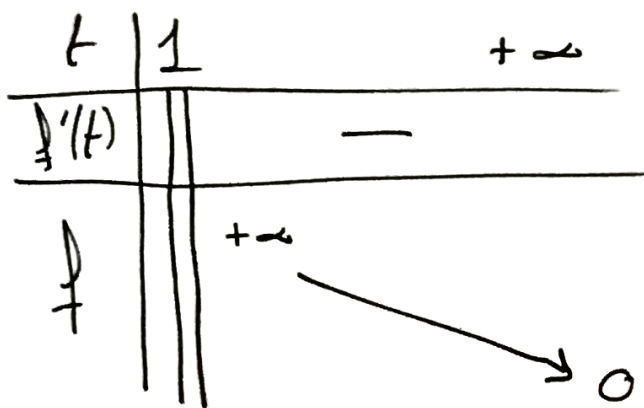
$$f(t) = \frac{1}{t \cdot \ln^2(t)}$$

f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et:

$$\forall t > 1, f'(t) = -\frac{\ln^2(t) + 2 \ln t}{t^2 \cdot \ln^4(t)} = -\frac{\ln(t) \cdot (\ln t + 2)}{t^2 \cdot \ln^4(t)}$$

du signe de $-(\ln t + 2)$

donc < 0 puisque $t > 1$.



f est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Soit $n \geq 2$.

$$\text{On a } \forall t \in [n, n+1], \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)^2} \leq \frac{1}{t \cdot \ln^2(t)} \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)^2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t \cdot \ln^2(t)} \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)^2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)^2} \leq \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_n^{n+1} \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)^2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{(n+1) \cdot \ln(n+1)^2} \leq \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)^2}$$

Par somme d'inégalités on obtient:

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)^2}$$

$$\text{ie } \forall n \geq 2, S_{n+1} - \frac{1}{2 \ln^2(2)} \leq \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq S_n$$

donc :

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} \leq S_n \leq \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2} + \frac{1}{2\ln^2(2)}$$

$$\text{Or } \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)^2} + \frac{1}{2\ln^2(2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{2\ln^2(2)}$$

donc (S_n) ne peut pas diverger vers $+\infty$.

Comme c'est une suite croissante (c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs) elle est convergente.

La série $\sum \frac{1}{n \cdot \ln(n)^2}$ est donc convergente.

Rem: En passant les calculs on montre que

$$R_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k \cdot \ln(k)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$$