1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = S_{n+1} - \ln(n+1) - S_n + \ln(n)$$
$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

or $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

donc $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ puisque $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

donc $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

de plus $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \underset{h \to 0}{o}(h^2)$

donc $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ puisque $\frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Finalement : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2n^2} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a donc $u_{n+1} - u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$

Comme $2>1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

donc la série $-\frac{1}{2} \cdot \sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{-1}{2n^2}$ converge aussi.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série

$\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Par dualité suites-séries la suite (u_n) converge.

Si on note γ sa limite on a donc :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \gamma$$

<u>Rappel</u> γ est la constante d'Euler.

<u>2.</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n > 0$

et $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^{n+1} \times e^{-n-1} \times \sqrt{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^n \times e^{-n} \times \sqrt{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \times e^{-1}$

donc $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right) \times \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$

or $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$

car on multiplie par n

Alors $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right) - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) = \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

On a donc $\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n) = \ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$

Comme $2 > 1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

donc la serie $\frac{1}{12} \cdot \sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{12n^2}$ converge aussi.

Par comparaison de séries à termes positifs, la serie

$\sum (\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n))$ converge.

Par dualité suites-series la suite $(\ln(x_n))_n$ est donc

convergente. On note $l \in \mathbb{R}$ sa limite.

Alors par continuité de exp sur $\mathbb{R}$:

$$x_n = e^{\ln(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^l$$

Si on pose $C \overset{def}{=} e^{-l} > 0$ on a : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/C$

donc $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C n^n e^{-n} \sqrt{n}$