1. Comme $2>1$ la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

On $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$

Donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

2.(a) $S_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2}$

En regroupant les termes d'indices pairs et impairs :

$$S_{2N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{4k^2} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} T_N - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

De même :

$$T_{2N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} T_N + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

2.(b) En additionnant les 2 formules :

$$S_{2N} + T_{2N} = \frac{1}{2} T_N$$

donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $S_{2N} = \frac{1}{2} T_N - T_{2N}$

2.(c) On a $T_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$

et $T_{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$ (suite extraite)

Donc $S_{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{2}\times\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{6}$

ie $S_{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\frac{\pi^2}{12}$

On a montré au 1. que (S_N) converge,
et dans ce cas (S_{2N}) a même limite que (S_N).

On peut donc conclure que : $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\frac{\pi^2}{12}$

Donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$