1. Rappels sur la trace :

si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i} \in \mathbb{R}$.

L'application $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire :

si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ on a $Tr(\lambda M + N) = \lambda . Tr(M) + Tr(N)$

Elle vérifie : $Tr(MN) = Tr(NM)$

$$⚠ \; Tr(M \times N) \neq Tr(M) \times Tr(N)$$

Si $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$Tr(A \times {}^tB) = \sum_{i=1}^{n} (A \times {}^tB)_{i,i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \times ({}^tB)_{j,i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \times B_{i,j} \right)$$

Par ex si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

on trouve $Tr(A \times {}^tB) = 2 - 2 + 0 + 2 = 2$

Soient $(A,B,C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\langle A,B\rangle = Tr(A \times {}^tB) \in \mathbb{R}$ donc $\langle .,. \rangle$ est une <u>forme</u>
- $\langle \lambda A+B, C\rangle = Tr((\lambda A+B)\times {}^tC) = Tr(\lambda A \times {}^tC + B \times {}^tC)$

$= \lambda . Tr(A\times {}^tC) + Tr(B \times {}^tC)$ car $Tr(.)$ est linéaire

$= \lambda . \langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle$

donc $\langle .,. \rangle$ est <u>linéaire à gauche</u>

- $\langle B,A\rangle = Tr(B\times {}^tA) = Tr({}^t(B\times {}^tA))$ car $Tr({}^tA) = Tr(A)$

$= Tr({}^t({}^tA) \times {}^tB)$ car ${}^t(AB) = {}^tB \times {}^tA$

$= Tr(A \times {}^tB)$

$= \langle A,B\rangle$

donc $\langle .,. \rangle$ est <u>symétrique</u>. Comme elle est linéaire à gauche, on peut en déduire qu'elle est <u>bilinéaire</u>.

- $\langle A,A\rangle = Tr(A\times {}^tA) = \sum_{i=1}^{n} (A \times {}^tA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \times ({}^tA)_{j,i}\right)$

$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2\right) \geqslant 0$

donc $\langle .,. \rangle$ est <u>positive</u>

- $\langle A, A\rangle = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2\right) = 0$

$\iff \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j}^2 = 0$ (somme nulle de termes positifs)

$\iff \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j} = 0$

$\iff A = 0_n$

donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme définie.

En conclusion, $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. C'est donc un produit scalaire.

2. Soit $(P,Q,R)\in \mathbb{R}_n[X]^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

- $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)\times Q(k) \in \mathbb{R}$ donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est une forme.

- $\langle \lambda P + Q, R\rangle = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P(k) + Q(k))\times R(k)$

$= \lambda \sum_{k=0}^{n} P(k).R(k) + \sum_{k=0}^{n} Q(k).R(k)$

$= \lambda.\langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle$

donc $\langle \cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.

• $\langle Q,P\rangle = \sum_{k=0}^{n} Q(k)\times P(k) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\times Q(k) = \langle P,Q\rangle$

donc $\langle .,. \rangle$ est <u>symétrique</u>. Comme elle est linéaire à gauche, on peut en déduire qu'elle est <u>bilinéaire</u>.

• $\langle P,P\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geqslant 0$ donc $\langle .,. \rangle$ est <u>positive</u>

• $\langle P,P\rangle = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0$

$\iff \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(k)^2 = 0$ (somme nulle de termes positifs)

$\iff \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(k) = 0$

$\iff \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$ car $\deg P \leq n$ et P a au moins $n+1$ racines

$\iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$

donc $\langle .,. \rangle$ est une <u>forme définie</u>.

Donc $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive. C'est donc un <u>produit scalaire</u>.

<u>3.</u> Soient $(P,Q,R) \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

• $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)\times Q(t)\,dt$ cette intégrale existe car la fonction $P\times Q$ est continue sur $[-1,1]$ (elle est polynomiale)

Donc $\langle .,. \rangle$ est une <u>forme</u>.

- $\langle \lambda P + Q, R \rangle = \int_{-1}^{1} (\lambda . P(t) + Q(t)) \times R(t) \, dt$

$$= \lambda . \int_{-1}^{1} P(t).R(t)\,dt + \int_{-1}^{1} Q(t) R(t)\,dt$$

$$= \lambda . \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

- $\langle Q, P \rangle = \int_{-1}^{1} Q(t).P(t)\,dt = \int_{-1}^{1} P(t).Q(t)\,dt = \langle P, Q \rangle$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique. Comme elle est linéaire à gauche, on en déduit qu'elle est bilinéaire.

- $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\,dt \geqslant 0$ car $\forall t \in [-1, 1],\ P(t)^2 \geqslant 0$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est positive.

- $\langle P, P \rangle = 0 \iff \int_{-1}^{1} P(t)^2\,dt = 0$

$\iff \forall t \in [-1, 1],\ P(t)^2 = 0$ car la fonction P^2 est continue, positive d'intégrale nulle

$\iff \forall t \in [-1, 1],\ P(t) = 0$

$\iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$ car P a une infinité de racines.

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme définie.