$\mathbb{E}$ espace euclidien et $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ vecteurs unitaires de $\mathbb{E}$.

⚠ à priori $n \neq \dim(\mathbb{E})$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}$.

<u>but</u> $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}, \ \|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle^2$

C'est le th 33 du cours.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\forall \vec{x} \in \mathbb{E}, \ \|\vec{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle^2$

<u>but</u> $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ base orthonormée de $\mathbb{E}$

* Mq $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est orthonormée.

On a $\forall j \in [\![1, n]\!], \ \|\vec{e_j}\|^2 = 1^2 = 1$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{e_j}, \vec{e_k} \rangle^2$$

$$= \|\vec{e_j}\|^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \langle \vec{e_j}, \vec{e_k} \rangle^2$$

$$= 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \langle \vec{e_j}, \vec{e_k} \rangle^2$$

Donc $\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \langle \vec{e_j}, \vec{e_k} \rangle^2 = 0$

Comme c'est une somme de nombres positifs :

$\forall (k,j) \in [\![1,n]\!]^2, \left(k \neq j \Rightarrow \langle \vec{e_j}, \vec{e_k} \rangle = 0 \right)$

Donc la famille $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est orthonormée.

Elle est donc libre.

* Il reste à montrer qu'elle est génératrice de $\mathbb{E}$

ou que $n = \dim(\mathbb{E})$.

On va faire les deux car ce sont des preuves intéressantes.

méthode 1 : mq $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est génératrice de $\mathbb{E}$.

Soit $\vec{y} \in \mathbb{E}$.

On pose $\vec{z} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{y}, \vec{e_k} \rangle . \vec{e_k}$

et on va montrer que $\vec{y} = \vec{z}$.

On a $\|\vec{y} - \vec{z}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{y} - \vec{z}, \vec{e_k} \rangle^2$

$= \sum_{k=1}^{n} \left(\langle \vec{y}, \vec{e_k} \rangle - \langle \vec{z}, \vec{e_k} \rangle \right)^2$

Mais $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\langle \vec{z}, \vec{e_k} \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{y}, \vec{e_j} \rangle \vec{e_j}, \vec{e_k} \right\rangle$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle \vec{y}, \vec{e_j} \rangle \cdot \langle \vec{e_j}, \vec{e_k} \rangle$$

$$= \langle \vec{y}, \vec{e_k} \rangle$$

car $\langle \vec{e_j}, \vec{e_k} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$

Donc $\|\vec{y} - \vec{z}\|^2 = \sum_{k=1}^{n} 0^2 = 0$ donc $\vec{y} = \vec{z}$

Donc $\vec{y} \in \operatorname{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$.

On a donc $\mathbb{E} \subseteq \operatorname{Vect}(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ ce qui prouve que la famille $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est génératrice de $\mathbb{E}$.

<u>méthode 2</u> mq $\dim(\mathbb{E}) = n$.

On sait déjà que $n \leqslant \dim(\mathbb{E})$ puisque la famille $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est libre.

Par l'absurde supposons que $n \quad \dim(\mathbb{E})$.

Comme la famille $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est orthonormée on peut trouver $\vec{e_{n+1}} \in \mathbb{E}$ tq $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}, \vec{e_{n+1}})$

est encore orthonormée, d'après le théorème de la base incomplète (on peut même ajouter des vecteurs jusqu'à obtenir une base orthonormée de $\mathbb{E}$).

Mais alors on a $$\|\vec{e_{n+1}}\|^2 = 1 = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{e_{n+1}}, \vec{e_k} \rangle^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 0^2 = 0 \quad \text{Absurde.}$$

Donc $n = \dim(\mathbb{E})$.

Comme $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ est orthonormée elle est donc une base orthonormée de $\mathbb{E}$ [th3 1].