Exercice 16

On a vu que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on peut définir le produit scalaire :

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tA \times B)$$

Et qu'alors $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$.

L'énoncé demande calculer :

$$\inf_{S \in S_n(\mathbb{R})} \|A - S\|^2 \underset{\substack{\swarrow \\ \text{à prouver....}}}{=} \left(\inf_{S \in S_n(\mathbb{R})} \|A - S\|\right)^2 = d(A, S_n(\mathbb{R}))^2$$

D'après le théorème de meilleure approximation :

$$d(A, S_n(\mathbb{R})) = \|A - p_{S_n(\mathbb{R})}(A)\|$$

Mais la décomposition de A sur la somme directe $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ est : $\frac{A + {}^tA}{2} + \frac{A - {}^tA}{2}$

donc $p_{S_n(\mathbb{R})}(A) = \frac{A + {}^tA}{2}$

donc $d(A, S_n(\mathbb{R})) = \left\|A - \frac{A + {}^tA}{2}\right\| = \left\|\frac{A - {}^tA}{2}\right\|$

$$= \frac{1}{2}\|A - {}^tA\|$$

donc $d(A, S_n(\mathbb{R}))^2 = \boxed{\frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2}$