Exercice 1

1. On montre que : $(u_1, \dots, u_p)$ est liée $\Longleftrightarrow \det\left(G(u_1, \dots, u_p)\right) = 0$

$\boxed{\Longrightarrow}$ si $u_1, \dots, u_p$ est liée

alors $\exists j \in [\![1, p]\!]$ tq u_j est CL de $u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_p$

donc $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$; $u_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k u_k$

On a alors $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\langle u_i ; u_j \rangle = \sum_{k \neq j} \alpha_k \langle u_i ; u_k \rangle$

Donc si on note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de $G(u_1, \dots, u_p)$

on a $C_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k$.

Donc la famille $(C_1, \dots, C_p)$ est liée.

Et donc $\det\left(G(u_1, \dots, u_p)\right) = 0$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $\det\left(G(u_1, \dots, u_p)\right) = 0$

Donc les colonnes de $G(u_1, \dots, u_p)$ notées $C_1, \dots, C_p$

forment une famille liée.

Donc $\exists j \in [\![1, p]\!]$, $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$; $C_j = \sum_{k \neq j} \alpha_k C_k$

On a donc $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\langle u_i, u_j \rangle = \langle u_i, \sum_{k \neq j} \alpha_k u_k \rangle$

donc $\langle u_i, u_j - \sum_{k \neq j} \alpha_k u_k \rangle = 0$

On pose $\mathbb{F} = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

Alors $v = u_j - \sum_{k \neq j} \alpha_k u_k \in \mathbb{F}$ et est orthogonal à $u_1, \dots, u_p$. Comme cette famille engendre $\mathbb{F}$ alors v est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{F}$ donc en particulier à lui-même : $\langle v, v \rangle = 0$

donc $v = 0_E$

Donc la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée.

2. On a $x = \underbrace{p_{\mathbb{F}}(x)}_{\in \mathbb{F}} + \underbrace{x - p_{\mathbb{F}}(x)}_{\in \mathbb{F}^\perp}$

Pour $i \in [\![1,p]\!]$: $\langle e_i, x \rangle = \langle e_i, p_{\mathbb{F}}(x) \rangle + 0 = \langle e_i, p_{\mathbb{F}}(x) \rangle$

Pour $j \in [\![1,p]\!]$: $\langle x, e_j \rangle = \langle p_{\mathbb{F}}(x), e_j \rangle$

et par Pythagore : $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \|p_{\mathbb{F}}(x)\|^2 + \|x - p_{\mathbb{F}}(x)\|^2$

③

$$G(e_1,\dots,e_p,x) = \begin{pmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_p\rangle & \langle e_1,p_F(x)\rangle + 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle e_p,e_1\rangle & \cdots & \langle e_p,e_p\rangle & \langle e_p,p_F(x)\rangle + 0 \\ \langle p_F(x),e_1\rangle & \cdots & \langle p_F(x),e_p\rangle & \|p_F(x)\|^2 + \|x-p_F(x)\|^2 \end{pmatrix}$$

En utilisant la linéarité p/r à la dernière colonne :

$$\det(G(e_1,\dots,e_p,x)) = \det(G(e_1,\dots,e_p,p_F(x)))$$

$$+ \begin{vmatrix} G(e_1,\dots,e_p) & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \langle p_F(x),e_1\rangle \cdots & \|x-p_F(x)\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\det(G(e_1,\dots,e_p,p_F(x)))}_{=0} + \|x-p_F(x)\|^2 \times \det(G(e_1,\dots,e_p))$$

car $p_F(x) \in F$ donc la famille $(e_1,\dots,e_p,p_F(x))$ est liée

On a donc $\boxed{d(x,F) = \|x-p_F(x)\| = \sqrt{\dfrac{\det(G(e_1,\dots,e_p,x))}{\det(G(e_1,\dots,e_p))}}}$