Pour f, g fonctions sur $[a,b]$ on pose :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \times g(t) \times \omega(t)\, dt$$

où $\omega : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement positive.

On montre comme pour le produit scalaire canonique de $C^0([a,b], \mathbb{R})$ que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une <u>forme bilinéaire symétrique</u>.

Si $f \in C^0([a,b], \mathbb{R})$ on a :

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 \times \omega(t)\, dt \geqslant 0$$

car $\forall t \in [a,b]$, $f(t)^2 \geqslant 0$ et $\omega(t) > 0$
et par positivité de l'intégrale.

De plus : $\langle f, f \rangle = 0 \iff \int_a^b f(t)^2 \times \omega(t)\, dt = 0$

car $f \times \omega$ continue positive $\iff \forall t \in [a,b],\ f(t)^2 \times \omega(t) = 0$

car $\forall t \in [a,b], \omega(t) \neq 0$ $\iff \forall t \in [a,b],\ f(t) = 0$

$\iff f = 0$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une <u>forme définie positive</u>.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un <u>produit scalaire</u> sur $C^0([a,b], \mathbb{R})$.