Soient $S \in S_n(\mathbb{R})$ et $A \in A_n(\mathbb{R})$.

Alors ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$.

Donc $\langle S, A \rangle = Tr(S.{}^tA) = -Tr(SA)$ car Tr linéaire

Mais par symétrie d'un produit scalaire :

$$\langle S, A \rangle = \langle A, S \rangle = Tr(A.{}^tS)$$

$$= Tr(AS)$$

$$= Tr(SA) \quad \text{voir TD7}$$

$$= -\langle S, A \rangle$$

donc $\langle S, A \rangle = 0$ donc $S \perp A$.

Ceci prouve que $A_n(\mathbb{R}) \subseteq S_n(\mathbb{R})^\perp$

Mais on sait prouver que $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$

ce qui donne $n^2 = \dim(S_n(\mathbb{R})) + \dim(A_n(\mathbb{R}))$

$$\text{donc } \dim(A_n(\mathbb{R})) = n^2 - \dim(S_n(\mathbb{R}))$$

$$= \dim(S_n(\mathbb{R})^\perp)$$

Et donc $A_n(\mathbb{R}) = (S_n(\mathbb{R}))^\perp$

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a donc :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in A_n(\mathbb{R}) = (S_n(\mathbb{R}))^\perp}$$

donc c'est la décomposition de M dans $S_n(\mathbb{R}) \oplus (S_n(\mathbb{R}))^\perp$

et donc $p_{S_n(\mathbb{R})}(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$

et $p_{A_n(\mathbb{R})}(M) = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$