1. $X(\Omega) = \left[\!\left[0, \frac{n(n+1)}{2} \right]\!\right]$

En effet si $(Y=0)$ est réalisé alors $(X=0)$ l'est aussi :

Si $(Y=n)$ est réalisé alors on pioche toutes les boules

donc $\left(X = \frac{n(n+1)}{2}\right)$ est réalisé puisque $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

$(X_k = k) =$ "on a pioché la boule n° k"

Pour tout $y \in [\![0, n]\!]$: $P_{(Y=y)}(X_k = k) = \dfrac{\binom{n-1}{y-1}\binom{1}{1}}{\binom{n}{y}} = \dfrac{y}{n}$ d'après la formule du pion

$$\text{donc } P((X_k = k) \cap (Y = y)) = P(Y=y) \times P_{(Y=y)}(X_k = k)$$
$$= \frac{1}{n+1} \times \frac{y}{n} = \frac{y}{n(n+1)}$$

Comme $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$:

$$P(X_k = k) = \sum_{y=0}^{n} P((X_k = k) \cap (Y = y)) = \sum_{y=0}^{n} \frac{y}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{y=0}^{n} y$$
$$= \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}$$

Comme $X_k(\Omega) = \{0; k\}$ on a $P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

x	0	k
$P(X_k = x)$	$1/2$	$1/2$

3. Pour tout $\omega \in \Omega$:

$$\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega) = \sum_{\substack{k \text{ tq la} \\ \text{boule } k \\ \text{est piochée}}} k + \sum_{\substack{k \text{ tq la} \\ \text{boule } k \text{ n'est} \\ \text{pas piochée}}} 0$$

$$= \sum_{\substack{k \text{ tq la} \\ \text{boule } k \\ \text{est piochée}}} k = X(\omega)$$

Donc $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{4}}$$