1. Soient X et Y deux VAR indépendantes et définies sur le même espace probabilisé.

Montrer que $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Donner un contre-exemple lorsque X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ famille de VAR mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé.

Montrer que $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

1. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ VA indépendantes.

$$\mathbb{E}\left((X+Y)^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 + Y^2 + 2XY\right)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) + 2\mathbb{E}(XY) \quad \text{par linéarité de } \mathbb{E}$$

mais $X \perp\!\!\!\perp Y$ donc $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$

Donc : $\mathbb{E}\left((X+Y)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) - 2\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$

D'après la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X+Y) = \mathbb{E}\left((X+Y)^2\right) - \left(\mathbb{E}(X+Y)\right)^2$$

mais $\left(\mathbb{E}(X+Y)\right)^2 = \left(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\right)^2$ par linéarité de $\mathbb{E}$

$$= \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(Y)^2 + 2\mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$$

Donc $V(X+Y) = \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2$

$$= V(X) + V(Y)$$

Contre exemple : si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$: $V(X+X) = V(2X) = 4 \times V(X) \neq 2 \times V(X) = V(X) + V(X)$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note H_n le prédicat :

" si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes alors

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \text{ "}$$

Pour $n=1$ si X_1 est une VAR on a $V(X_1)=V(X_1)$

Donc H_1 est vrai.

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tq H_n est vrai.

Soient $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ VAR mutuellement indépendantes.

On pose $S=\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $T=\sum_{k=1}^{n+1} X_k$.

On a $T=S+X_{n+1}$

D'après le lemme des coalitions : $S \perp\!\!\!\perp X_{n+1}$

Donc d'après 1. on a :

$$V(T)=V(S)+V(X_{n+1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n} V(X_k) + V(X_{n+1}) \quad \text{d'après } H_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1} V(X_k)$$

Donc H_{n+1} est vrai.

Par récurrence : H_n est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Rem : on peut remplacer "mutuellement indépendantes" par "2 à 2 indépendantes" mais la démonstration est plus difficile.