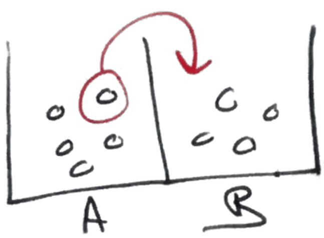
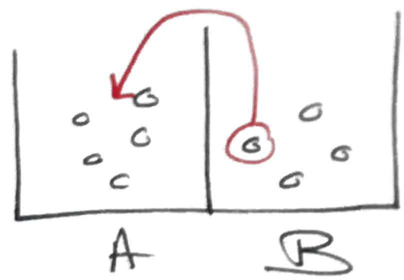
Urnes A et B contenant en tout b boules.

A chaque étape une boule est sélectionnée au hasard et est changée d'urne.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note X_n = "nb de boules dans l'urne A à l'instant n"



ou



C'est le modèle de diffusion d'un gaz à travers une membrane, introduit en 1907 par les époux Ehrenfest.

On a donc $X_{n+1} = X_n \pm 1$

$$= \begin{cases} X_n + 1 & \text{si on choisit une boule dans B} \\ X_n - 1 & \text{si on choisit une boule dans A} \end{cases}$$

<u>1.</u> On a $X_n(\Omega) = [\![0, b]\!]$

D'après la formule des probabilités totales.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = \sum_{k=0}^{b} \mathbb{P}(X_n = k) \times \mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1} - X_n = 1)$$

or si $k \in [\![0,b]\!]$: $\mathbb{P}_{(X_n=k)}(X_{n+1}-X_n=1)=\frac{b-k}{b}=1-\frac{k}{b}$

Donc $\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=1)=\sum_{k=0}^{b}\left(1-\frac{k}{b}\right).\mathbb{P}(X_n=k)$

$=\sum_{k=0}^{b}\mathbb{P}(X_n=k)-\frac{1}{b}\sum_{k=0}^{b}k.\mathbb{P}(X_n=k)$

$=\boxed{1-\frac{1}{b}\mathbb{E}(X_n)}$

2. $(X_{n+1}-X_n)(\Omega)=\{-1;1\}$

Donc $\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n)=1\times\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=1)+(-1)\times\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=-1)$

$=\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=1)-\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=-1)$

Mais $\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=-1)=1-\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=1)$

Donc $\mathbb{E}(X_{n+1}-X_n)=2.\mathbb{P}(X_{n+1}-X_n=1)-1$

$=1-\frac{2}{b}\mathbb{E}(X_n)$

Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X_{n+1})-\mathbb{E}(X_n)=1-\frac{2}{b}.\mathbb{E}(X_n)$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_{n+1})=1+\left(1-\frac{2}{b}\right)\mathbb{E}(X_n)}$$

3. On reconnaît une suite arithmético-géométrique de point fixe $l \in \mathbb{R}$ vérifiant : $l = \left(1 - \frac{2}{b}\right) l + 1$

$$\iff l = \frac{b}{2}$$

La suite $\left(\mathbb{E}(X_n) - \frac{b}{2}\right)_n$ est donc géométrique de raison $1 - \frac{2}{b}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_n) - \frac{b}{2} = \left(1 - \frac{2}{b}\right)^n \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{b}{2}\right)$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_n) = \left(1 - \frac{2}{b}\right)^n \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{b}{2}\right) + \frac{b}{2}}$$

Comme $b \geq 2$: $0 \leq 1 - \frac{2}{b} < 1$

donc $\left(1 - \frac{2}{b}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\boxed{\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{b}{2}}$

Au bout d'un temps très long il y en a moyenne autant de boules dans l'urne A que dans l'urne B.