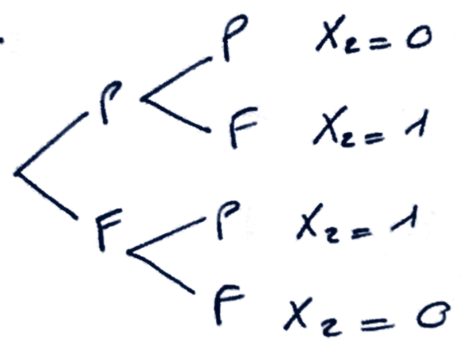
1.



$X_2(\Omega)=\{0;1\}$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$ on définit les événements :

$P_k=$ " le k-ième lancer donne pile "

$F_k=$ " le k-ième lancer donne face "

$(X_2=0)=(P_1\cap P_2)\overset{+}{\cup}(F_1\cap F_2)$

Par additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(X_2=0)=\mathbb{P}(P_1\cap P_2)+\mathbb{P}(F_1\cap F_2)$$

Comme les lancers sont effectués de manières indépendantes on a $P_1 \perp\!\!\!\perp P_2$ et $F_1\perp\!\!\!\perp F_2$.

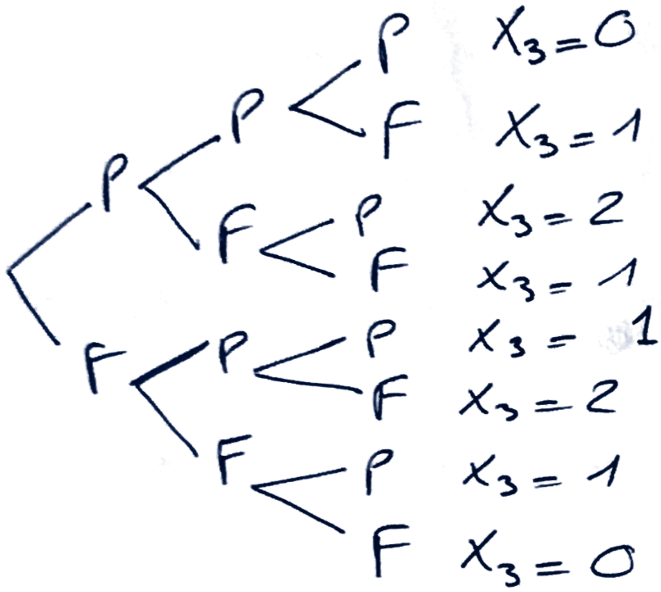
Donc $\mathbb{P}(X_2=0)=\mathbb{P}(P_1)\times\mathbb{P}(P_2)+\mathbb{P}(F_1)\times\mathbb{P}(F_2)$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}$$

Et donc $\mathbb{P}(X_2=1)=1-\mathbb{P}(X_2=0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$.

Et donc $\mathbb{E}(X_2) = \boxed{\frac{1}{2}}$ et $V(X_2) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$



donc $X_3(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

De même pour X_2 on trouve

$$\mathbb{P}(X_3 = 0) = \frac{2}{8}$$

$$\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{4}{8}$$

$$\mathbb{P}(X_3 = 2) = \frac{2}{8}$$

donc $\mathbb{E}(X_3) = \frac{8}{8} = 1$

$$\mathbb{E}(X_3^2) = \frac{12}{8}$$

donc $V(X_3) = \frac{12}{8} - 1^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

2. Si on lance n fois la pièce alors le nombre de fois où on obtient un côté différent du précédent est compris entre 0 (par ex si on obtient PP.... P) et $n-1$ (par ex si on obtient PFPFPF.....)

Donc $\boxed{X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]}$

$(X_n = 0)$ est réalisé ssi on n'obtient que des piles ou que des faces.

$$(X_n = 0) = (P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n) \uplus (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n)$$

Par additivité de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n) + \mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n)$$

Comme $P_1, \ldots, P_n$ sont mutuellement indépendants :

$$\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(P_n) = \frac{1}{2^n}$$

et de même $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n) = \dfrac{1}{2^n}$

Donc $\mathbb{P}(X_n = 0) = \dfrac{2}{2^n} = \boxed{\dfrac{1}{2^{n-1}}}$

De même $(X_n = n-1)$ est réalisé ssi on n'obtient

PFPFPF.... ou FPFPFP.....

et on trouve $\mathbb{P}(X_n = n-1) = \boxed{\dfrac{1}{2^{n-1}}}$

<u>3.</u> $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Comme $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}\big((X_{n+1} = k) \cap (X_n = j)\big)$$

mais si $(X_n = j)$ est réalisé alors X_{n+1} ne peut prendre que les valeurs j ou $j+1$

donc $\mathbb{P}\big((X_{n+1} = k) \cap (X_n = j)\big) = 0$ si $j \notin \{k ; k-1\}$

Donc $\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \mathbb{P}((X_{n+1}=k)\cap(X_n=k-1)) + \mathbb{P}((X_{n+1}=k)\cap(X_n=k))$

De plus $\mathbb{P}((X_{n+1}=k)\cap(X_n=k-1)) = \mathbb{P}(X_n=k-1) \times \mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(X_{n+1}=k)$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=k-1)$$

car $\mathbb{P}_{(X_n=k-1)}(X_{n+1}=k)$ est la probabilité d'obtenir au $(n+1)$-ième lancer un côté différent de celui obtenu au n-ième.

Et de même $\mathbb{P}((X_{n+1}=k)\cap(X_n=k)) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=k)$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=k-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=k)}$

4. (a) $Q_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n=k) = \boxed{1}$ car $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$

Q_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

$\forall s \in \mathbb{R}$, $Q_n'(s) = \sum_{k=1}^{n-1} k\,\mathbb{P}(X_n=k)\,s^{k-1}$

donc $Q_n'(1) = \sum_{k=1}^{n-1} k \cdot \mathbb{P}(X_n=k)$

Mais comme $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ on a :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} k \times \mathbb{P}(X_n = k) = 0 \times \mathbb{P}(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{n-1} k \times \mathbb{P}(X_n = k)$$

donc $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = Q_n'(1)}$

On a ensuite :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad Q_n''(s) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)\mathbb{P}(X_n = k) s^{k-2}$$

donc $Q_n''(1) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) \times \mathbb{P}(X_n = k)$

$= \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1) \times \mathbb{P}(X_n = k)$ en ajoutant 2 termes nuls

$= \mathbb{E}(X_n(X_n - 1))$ d'après le th de transfert

$= \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)$ par linéarité de l'espérance

Avec la formule de Koenig-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \boxed{Q_n''(1) + Q_n'(1) - (Q_n'(1))^2}$$

4.(b) On a :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=k-1)$$

$$\text{donc } \mathbb{P}(X_{n+1}=k)s^k = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=k)s^k + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=k-1)s^k$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_{n+1}=k)s^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_n=k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_n=k-1)s^k$$

Or : $$\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_{n+1}=k)s^k = G_{n+1}(s) - \mathbb{P}(X_{n+1}=0) - \mathbb{P}(X_{n+1}=n)s^n$$

$$= G_{n+1}(s) - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}s^n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_n=k)s^k = G_n(s) - \mathbb{P}(X_n=0) = G_n(s) - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(X_n=k-1)s^k = \sum_{k=0}^{n-2}\mathbb{P}(X_n=k)s^{k+1}$$

$$= s \times \sum_{k=0}^{n-2}\mathbb{P}(X_n=k)s^k$$

$$= s \times \left(G_n(s) - \mathbb{P}(X_n=n-1)s^{n-1}\right)$$

$$= s \times \left(G_n(s) - \frac{1}{2^{n-1}}s^{n-1}\right)$$

Donc :

$$Q_{n+1}(s) - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n}s^n = \frac{1}{2}Q_n(s) - \frac{1}{2^n} + \frac{s}{2}Q_n(s) - \frac{s^n}{2^n}$$

ie $\boxed{Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2}Q_n(s)}$

4.(c) Pour $s \in \mathbb{R}$ fixé la suite $(Q_n(s))_{n\geq 2}$ est donc géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$.

Donc $\forall n \geq 2$, $Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} \times Q_2(s)$

Or $Q_2(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s = \frac{1+s}{2}$

donc $\boxed{\forall n \geq 2,\ \forall s \in \mathbb{R},\ Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}}$

4.(d) $\forall n \geq 2$, $\mathbb{E}(X_n) = Q_n'(1)$

or $\forall s \in \mathbb{R}$, $Q_n'(s) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}$

Donc $\boxed{\forall n \geq 2,\ \mathbb{E}(X_n) = \frac{n-1}{2}}$

Et $\forall s \in \mathbb{R}$, $Q_n''(s) = \frac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-3}$ $(n \geq 3)$

donc $Q_n''(1) = \frac{(n-1)(n-2)}{4}$ (vrai même si $n=2$)

donc $V(X_n) = \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$

$= \frac{n-1}{4} \times \left[n-2+2-(n-1)\right]$

$= \boxed{\frac{n-1}{4}}$

4.(e) On a $\forall s \in \mathbb{R}$, $Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k)\, s^k$

Et $\forall s \in \mathbb{R}$, $Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} s^k$

Donc par unicité des coefficients d'un polynôme :

$\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{k}$

Donc $\boxed{\forall n \geq 2, \quad X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n-1, \frac{1}{2}\right)}$