① On note $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

On a : $|z| = |z - 6 + 5i| \iff |z|^2 = |z - 6 + 5i|^2$

$\iff x^2 + y^2 = (x-6)^2 + (y+5)^2$

$\iff x^2 + y^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 10y + 25$

$\iff 12x - 10y - 61 = 0$

L'ensemble des solutions est la droite d'équation

$12x - 10y = 61$

(c'est la médiatrice des points d'affixe 0 et $6 - 5i$).

② On a : $|\bar{z} + i| = 2 \iff |\overline{\bar{z} + i}| = 2$

$\iff |z - i| = 2$

L'ensemble des solutions est le cercle de centre i et de rayon 2.

③ On note $z = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

On a $z(\bar{z} + 1) = 1 \iff 2|z|^2 + z = 1$

$\iff 2(x^2 + y^2) + x + iy = 1$

$\iff \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

L'ensemble des solutions est $\{\frac{1}{2} ; -1\}$

4) On a : $|z^2|=|z| \iff |z|^2=|z|$

$$\iff |z|=0 \text{ ou } 1$$

$$\iff z=0 \text{ ou } z\in\mathbb{U}$$

L'ensemble des solutions est $\{0\}\cup\mathbb{U}$.

5) $\frac{z+4i}{5z-3}\in\mathbb{R}$ est défini pour $z\neq\frac{3}{5}$.

On note $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

On a : $\frac{z+4i}{5z-3}\in\mathbb{R} \iff \frac{z+4i}{5z-3}=\overline{\frac{z+4i}{5z-3}}$

$$\iff \frac{z+4i}{5z-3}=\frac{\bar{z}-4i}{5\bar{z}-3}$$

$$\iff (z+4i)(5\bar{z}-3)=(\bar{z}-4i)(5z-3)$$

$$\iff 5|z|^2-3z+20i\bar{z}-12i=5|z|^2-20iz-3\bar{z}+12i$$

$$\iff -3(z-\bar{z})+20i(\bar{z}+z)=24i$$

$$\iff -6iy+40ix=24i$$

$$\iff 20x-3y=12$$

On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $20x-3y=12$.

⚠ $z=\frac{3}{5}\in\mathcal{D}$.

Donc l'ensemble des solutions est $\mathcal{D}\setminus\left\{\frac{3}{5}\right\}$.

6) $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0$ est défini pour $z\neq -1$.

On note $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

On a : $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0 \iff \frac{z-1}{z+1}\in i\mathbb{R}$

$$\iff \frac{z-1}{z+1}=-\overline{\frac{z-1}{z+1}}$$

$$\iff \frac{z-1}{z+1}=-\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$$

$$\iff (z-1)(\bar{z}+1)=(1-\bar{z})(z+1)$$

$$\iff |z|^2-\bar{z}+z-1=-|z|^2+z-\bar{z}+1$$

$$\iff |z|^2=1$$

On note C le cercle de centre O et de rayon 1.

⚠ $-1\in C$.

L'ensemble des solutions est $C\setminus\{-1\}$.

7) $\operatorname{Arg}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-\frac{\pi}{4}\ [\pi]$ est défini pour $z\neq \pm i$

On note $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

On a : $\operatorname{Arg}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-\frac{\pi}{4}[\pi] \iff \operatorname{Arg}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)=\operatorname{Arg}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\ [\pi]$

$$\iff \operatorname{Arg}\left(\frac{z-i}{(z+i)e^{-i\pi/4}}\right)=0\ [\pi]$$

$$\iff \frac{z-i}{(z+i)e^{-i\pi/4}}\in\mathbb{R}$$

$$\iff \frac{z-i}{(z+i)e^{-i\pi/4}}=\overline{\frac{z-i}{(z+i)e^{-i\pi/4}}}$$

$$\iff \frac{z-i}{(z+i)e^{-i\pi/4}} = \frac{\overline{z}+i}{(\overline{z}-i)e^{i\pi/4}}$$

$$\iff (z-i)(\overline{z}-i)e^{i\pi/4} = (\overline{z}+i)(z+i)e^{-i\pi/4}$$

$$\iff (z-i)(\overline{z}-i)\,i = (\overline{z}+i)(z+i) \quad \text{car } (e^{i\pi/4})^2 = i$$

$$\iff i|z|^2 + z + \overline{z} + i = |z|^2 + i(z+\overline{z}) - 1$$

$$\iff (i-1)|z|^2 + (1-i)(z+\overline{z}) + 1 - i = 0$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\iff (x-1)^2 + y^2 = 2$$

On note C le cercle de centre 1 et de rayon $\sqrt{2}$.

⚠ $i \in C$ et $-i \in C$

L'ensemble des solutions est $C \setminus \{-i\,;\,i\}$.