Exercice 7 $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

On remarque que $S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikx}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$

et de même $T_n = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)$

On est donc ramené à calculer $A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$

On a $A_n = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$

Cas 1 si $e^{ix} = 1$ ie si $x = 0\ [2\pi]$

$A_n = n+1 \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{S_n = n+1 \text{ et } T_n = 0}$

Cas 2 si $e^{ix} \neq 1$ ie si $x \neq 0\ [2\pi]$

$$A_n = \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}$$

$$= e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{-2i \times \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{-2i \times \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = e^{i\frac{nx}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \in \mathbb{R}$$

donc $\boxed{S_n = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \times \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } T_n = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right) \times \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

Autre méthode

$$S_n \times \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \times \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \frac{1}{2}\sin\left(-\frac{x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$= \sin\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)x\right) \times \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Donc si $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$ ie $\frac{x}{2} \neq 0\ [\pi]$ ie $x \neq 0\ [2\pi]$:

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \times \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$